$\boxed{1}$ 座標平面上に 2 点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ 1-\sin\theta)$ がある．次の問いに答えよ．

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ を θ で表せ．

(2) $\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$ を用いて，$\sin\dfrac{7\pi}{12}$ の値を求めよ．

(3) $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\pi$ における $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ の最大値と最小値を求めよ．また，最大値，最小値を与える θ の値を求めよ．

$\boxed{2}$ 四面体 OABC の各辺の長さをそれぞれ $\mathrm{AB}=\sqrt{7}$，$\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{CA}=\sqrt{5}$，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OC}=\sqrt{7}$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2) 三角形 OAB を含む平面を α とし，点 C から平面 α に下ろした垂線と α との交点を H とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．

$\boxed{3}$ 放物線 $y=(x-1)^2+q\ \ (q>0)$ のグラフに，原点 O から引いた 2 本の接線が互いに垂直に交わっているとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) q の値を求めよ．

(2) 2 本の接線と放物線とで囲まれた図形の面積を S_1 とする．また，2 本の接線と放物線との接点を点 A，B とし，三角形 OAB の面積を S_2 とする．このとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ の値を求めよ．

$\boxed{4}$ 方程式 $7x+13y=1111$ を満たす自然数 x，y に対して，次の問いに答えよ．

(1) この方程式を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ はいくつあるか求めよ．

(2) $s=-x+2y$ とするとき，s の最大値と最小値を求めよ．

(3) $t=|2x-5y|$ とするとき，t の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{5}$ 正六角形の頂点を反時計回りに P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6 とする．1 個のさいころを 2 回投げて，出た目を順に j，k とする．次の問いに答えよ．

（1）P_1，P_j，P_k が異なる 3 点となる確率を求めよ．

（2）P_1，P_j，P_k が正三角形の 3 頂点となる確率を求めよ．

（3）P_1，P_j，P_k が直角三角形の 3 頂点となる確率を求めよ．

$\boxed{6}$ x の多項式 $x^4 - px + q$ が $(x-1)^2$ で割り切れるとき，定数 p，q の値を求めよ．

$\boxed{7}$ x の 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが相異なる 3 点 $(a,\ b)$，$(b,\ c)$，$(c,\ a)$ を通るものとする．ただし，$abc \neq 0$ とする．

（1）a の値を求めよ．

（2）b，c の値を求めよ．

$\boxed{8}$ 曲線 $y = x^3 - x^2 - 2x + 2$ について，

(1) 点 $(0,\ 1)$ を通る接線の方程式を求めよ．

(2) (1) の接線と曲線とによって囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{9}$ （1）不等式 $(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x + 3 \leqq 0$ を解け．

（2）x が (1) で求めた範囲にあるとき，

$$f(x) = \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{3}\right)\left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{4}\right)$$

の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ．