

1 等式 $x + y + z = 10$ を満たす整数 $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$ の組 (x, y, z) の個数を求めよ.

2 不等式 $|3x - a| < 4$ を満たす整数 x が 1, 2, 3 の 3 つだけであるとき, 定数 a のとり得る値の範囲を求めよ.

3 三角形 OAB において, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく. $0 < p < 1, 0 < q < 1$ とし, 辺 OA を $p : (1 - p)$ に内分する点を C, 辺 OB を $q : (1 - q)$ に内分する点を D とする. 線分 AD と線分 BC の交点を E とし, また, 線分 AB, OE, CD の中点をそれぞれ F, G, H とする.

(1) \overrightarrow{OF} を \vec{a}, \vec{b} で表せ. また, \overrightarrow{OH} を \vec{a}, \vec{b}, p, q で表せ.

(2) $\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GH}$ を \vec{a}, \vec{b}, p, q で表せ.

(3) $OA = 3, OB = 2, \angle AOB = \frac{2}{3}\pi$ とするとき, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ. さらに, AB と GF は垂直で $GF : GH = 7 : 2$ とするとき, p の値と GF の長さを求めよ.

4 a, b を実数とし, i を虚数単位とする. $1 + i$ が 3 次方程式 $x^3 + ax^2 - 4x + b = 0$ の解であるとき, a, b の値を求めよ.

5 円に内接する四角形 ABCD があり, $AB = 4, BC = 3, CD = 1, DA = 4$ である. $\angle ABC = \theta$ とするとき, $\cos \theta$ の値および線分 AC の長さを求めよ. また, 線分 AC と線分 BD の交点を P とするとき, 線分 AP の長さを求めよ.

6 次の不等式を解け.

$$|x^2 + 6x - 1| \leq 7 - x.$$

7 赤玉 3 個, 白玉 5 個の合計 8 個の玉が入っている袋がある. この袋から同時に 3 個の玉を取り出すとき, 3 個のうち少なくとも 1 個は赤玉であるという条件の下で, 3 個中 2 個が赤玉, 1 個が白玉である確率を求めよ.

8 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, 関数

$$5 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta$$

の最大値と最小値を求めよ.

9 座標平面上に放物線 $C_1 : y = \frac{1}{2}x^2$ がある. また, C_1 上の点 $A \left(\sqrt{3}, \frac{3}{2} \right)$ における C_1 の接線を l とする. さらに, 点 A において l と接し, $B(\sqrt{3}, 0)$ を通る円を C_2 とする.

- (1) 直線 l の方程式を求めよ.
- (2) 円 C_2 の中心 D の座標を求めよ.
- (3) 曲線 C_1, C_2 および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

10 等式

$$(\log_4 x) (\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x}) - (\log_8 x^3)^2 + \log_2(8x^3) + 1 = 0$$

を満たす実数 x をすべて求めよ.

11 四角形 $ABCD$ は円に内接している. 辺 AB の延長と辺 DC の延長の交点を P , 二つの線分 AC と BD の交点を Q とする. $AB = 1, BP = 1$, $\triangle QDC$ の面積は $\triangle QAB$ の面積の 4 倍である.

- (1) 線分 PC の長さを求めよ.
- (2) $\triangle QBC$ の面積は $\triangle QAB$ の面積の何倍であるかを求めよ.