

1

等式 $x + y + z = 10$ を満たす整数 $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$ の組 (x, y, z) の個数を求めよ.

【2024 北海道大学】

解説

$X = x - 1, Y = y - 2, Z = z - 3$ とおくと,

$$x + y + z = 10 \iff X + Y + Z = 4$$

であり, 求める個数は $X + Y + Z = 4$ を満たす 0 以上の整数の組 (X, Y, Z) の個数である.

条件を満たす (X, Y, Z) の組は $\bigcirc$ 4 個と, I 2 個の合計 6 個の (同じものを含む) 順列との間に 1 対 1 対応がつけられる (左側の I より左にある $\bigcirc$ の個数が X , 左側の I と右側の I の間にある $\bigcirc$ の個数が Y , 右側の I より右にある $\bigcirc$ の個数が Z).

(X, Y, Z)	$\bigcirc$ 4 個と, I 2 個の順列
$(1, 3, 0)$	$\bigcirc \text{I} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{I}$
$(4, 0, 0)$	$\bigcirc \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{II}$
$(2, 1, 1)$	$\bigcirc \bigcirc \text{I} \bigcirc \text{I} \bigcirc$

よって, 求める総数は

$$\frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15.$$

参考

重複組合せの記号 (H) を用いると, 求める数は

$${}_3\text{H}_4 = {}_{4+3-1}\text{C}_2 = {}_6\text{C}_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

となる. 一般に, x 種類のものから重複を許して y 個選ぶ組合せの総数を記号 ${}_x\text{H}_y$ で表す. これは $\bigcirc y$ 個と, $\text{I} x - 1$ 個の合計 $y + x - 1$ 個の (同じものを含む) 順列の総数と等しく,

$${}_x\text{H}_y = {}_{y+x-1}\text{C}_y.$$

2

不等式 $|3x - a| < 4$ を満たす整数 x が 1, 2, 3 の 3 つだけであるとき, 定数 a のとり得る値の範囲を求めよ.

【2024 福島大学】

解説

$$\begin{aligned} |3x - a| < 4 &\iff -4 < 3x - a < 4 \\ &\iff a - 4 < 3x < a + 4 \\ &\iff \frac{a - 4}{3} < x < \frac{a + 4}{3}. \end{aligned}$$

これより条件は,

$$0 \leq \frac{a - 4}{3} < 1, \quad 3 < \frac{a + 4}{3} \leq 4.$$

$$\therefore 5 < a < 7.$$

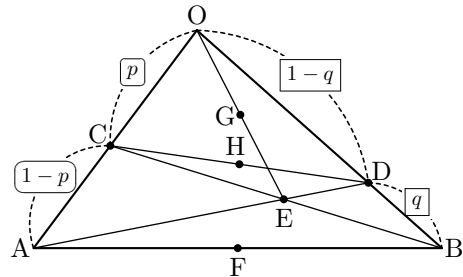
3

三角形 OAB において, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく. $0 < p < 1, 0 < q < 1$ とし, 辺 OA を $p : (1 - p)$ に内分する点を C, 辺 OB を $q : (1 - q)$ に内分する点を D とする. 線分 AD と線分 BC の交点を E とし, また, 線分 AB, OE, CD の中点をそれぞれ F, G, H とする.

- $\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ. また, $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}, \vec{b}, p, q$ で表せ.
- $\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{GH}$ を $\vec{a}, \vec{b}, p, q$ で表せ.
- $OA = 3, OB = 2, \angle AOB = \frac{2}{3}\pi$ とするとき, 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ. さらに, AB と GF は垂直で $GF : GH = 7 : 2$ とするとき, p の値と GF の長さを求めよ.

【2024 関西学院大学】

解説



- F は AB の中点であるので,

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

また, H は CD の中点であるので,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} = \frac{p}{2}\vec{a} + \frac{q}{2}\vec{b}.$$

- $\triangle EAB : \triangle OEB = CA : OC = (1 - p) : p$ であり, $\triangle EAB : \triangle OEA = BD : OD = (1 - q) : q$ であるから,

$$\begin{aligned} \triangle EAB : \triangle OEB : \triangle OEA \\ = (1 - p)(1 - q) : p(1 - q) : (1 - p)q \end{aligned}$$

である. したがって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \frac{\triangle OEB}{\triangle OAB} \vec{a} + \frac{\triangle OEA}{\triangle OAB} \vec{b} \\ &= \frac{p(1 - q)}{1 - pq} \vec{a} + \frac{(1 - p)q}{1 - pq} \vec{b}. \end{aligned}$$

「?」と思ったら, 本編の p.107 を熟読せよ!

$$\begin{aligned}\vec{GF} &= \vec{OF} - \vec{OG} = \vec{OF} - \frac{1}{2}\vec{OE} \\ &= \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{p(1-q)}{1-pq}\vec{a} + \frac{(1-p)q}{1-pq}\vec{b}\right) \\ &= \frac{1-p}{2(1-pq)}\vec{a} + \frac{1-q}{2(1-pq)}\vec{b}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{GH} &= \vec{OH} - \vec{OG} \\ &= \left(\frac{p}{2}\vec{a} + \frac{q}{2}\vec{b}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{p(1-q)}{1-pq}\vec{a} + \frac{(1-p)q}{1-pq}\vec{b}\right) \\ &= \frac{pq(1-p)}{2(1-pq)}\vec{a} + \frac{pq(1-q)}{2(1-pq)}\vec{b}.\end{aligned}$$

(3) 内積の定義から、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 \cdot \cos \frac{2}{3}\pi = -3.$$

AB と GF が垂直であることから、

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{GF} &= 0. \\ (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \left\{(1-p)\vec{a} + (1-q)\vec{b}\right\} &= 0.\end{aligned}$$

$$(1-p)(-3-3^2) + (1-q)\{2^2 - (-3)\} = 0.$$

$$12p - 7q - 5 = 0. \quad \dots \textcircled{1}$$

また、(2) の結果から、 $\vec{GH} = pq\vec{GF}$ の成立がわかるので、 $GF : GH = 7 : 2$ より、

$$pq = \frac{2}{7}. \quad \dots \textcircled{2}$$

① に p をかけて ② を用いると、

$$12p^2 - 2 - 5p = 0.$$

$$(3p-2)(4p+1) = 0.$$

$0 < p < 1$ より、

$$p = \frac{2}{3}.$$

このとき、 $q = \frac{3}{7}$ であり、

$$\vec{GF} = \frac{1}{30}(7\vec{a} + 12\vec{b}).$$

ここで、

$$\begin{aligned}|\vec{7a} + 12\vec{b}|^2 &= 7^2|\vec{a}|^2 + 2 \cdot 7 \cdot 12 \vec{a} \cdot \vec{b} + 12^2|\vec{b}|^2 \\ &= 7^2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot (-3) + 12^2 \cdot 2^2 \\ &= 3^2 \cdot 57\end{aligned}$$

であるから、

$$|\vec{GF}| = \frac{1}{30} \cdot 3\sqrt{57} = \frac{\sqrt{57}}{10}.$$

参考 $\vec{GH} = pq\vec{GF}$ により、いつでも 3 点 G, H, F は同一直線上にあることがわかる。この事実をニュートンの定理といい、この直線のことをニュートン線と呼ぶ。

4

a, b を実数とし、 i を虚数単位とする。 $1+i$ が 3 次方程式 $x^3 + ax^2 - 4x + b = 0$ の解であるとき、 a, b の値を求めよ。 【2024 愛媛大学】

解説 実数係数の方程式 $x^3 + ax^2 - 4x + b = 0$ が $1+i$ を解にもつので、その共役複素数である $1-i$ も解である。もう一つの解を X とすると、解と係数の関係から、

$$\begin{cases} (1+i) + (1-i) + X = -\frac{a}{1}, \\ (1+i)(1-i) + X\{(1+i) + (1-i)\} = \frac{-4}{1}, \\ (1+i)(1-i)X = -\frac{b}{1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X + 2 = -a, \\ 2 + 2X = -4, \\ 2X = -b \end{cases} \quad \text{より} \quad \begin{cases} X = -3, \\ a = 1, \\ b = 6. \end{cases}$$

注意 次のように解いてもよい。 $x = 1+i$ が解なので、

$$(1+i)^3 + a(1+i)^2 - 4(1+i) + b = 0.$$

$$(-2+2i) + a \cdot 2i - 4 - 4i + b = 0.$$

$$(b-6) + (2a-2)i = 0.$$

ここで、 a, b が実数であることから、

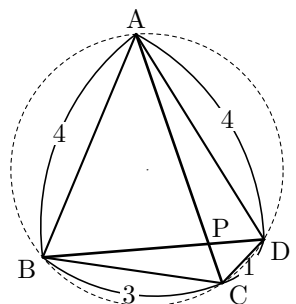
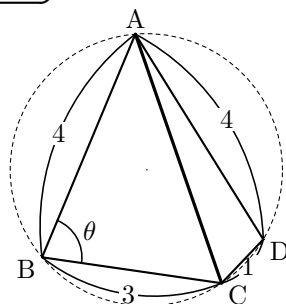
$$b-6=0, \quad 2a-2=0.$$

$$\therefore a=1, \quad b=6.$$

5

円に内接する四角形 ABCD があり、 $AB = 4$, $BC = 3$, $CD = 1$, $DA = 4$ である。 $\angle ABC = \theta$ とするとき、 $\cos \theta$ の値および線分 AC の長さを求めよ。また、線分 AC と線分 BD の交点を P とするとき、線分 AP の長さを求めよ。 【2024 長崎大学】

解説



三角形 ABC で余弦定理から、

$$\begin{aligned} AC^2 &= 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \theta \\ &= 25 - 24 \cos \theta. \end{aligned} \quad \dots ①$$

四角形 ABCD が円に内接することから、

$$\angle CDA = 180^\circ - \theta$$

より、

$$\cos(\angle CDA) = \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

であることに注意し、三角形 ACD で余弦定理から、

$$\begin{aligned} AC^2 &= 4^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \cos(180^\circ - \theta) \\ &= 17 + 8 \cos \theta. \end{aligned} \quad \dots ②$$

①, ②より、

$$25 - 24 \cos \theta = 17 + 8 \cos \theta.$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{4}.$$

これと① (あるいは ②) より、

$$AC^2 = 19.$$

$$\therefore AC = \sqrt{19}.$$

また、 $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ より、

$$\sin(\angle BAD) = \sin(\angle BCD)$$

であることに注意すると、

$$\frac{AP}{CP} = \frac{\triangle ABD}{\triangle CBD} = \frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD} = \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 1} = \frac{16}{3}$$

であるから、

$$AP = \frac{16}{16+3} AC = \frac{16}{19} \sqrt{19}.$$

注意 円に内接する四角形の対角線の交点が対角線をどう内分するかは、面積に着目することで四角形の 4 辺の長さから簡単にわかることを覚えておこう!

6

次の不等式を解け。

$$|x^2 + 6x - 1| \leq 7 - x.$$

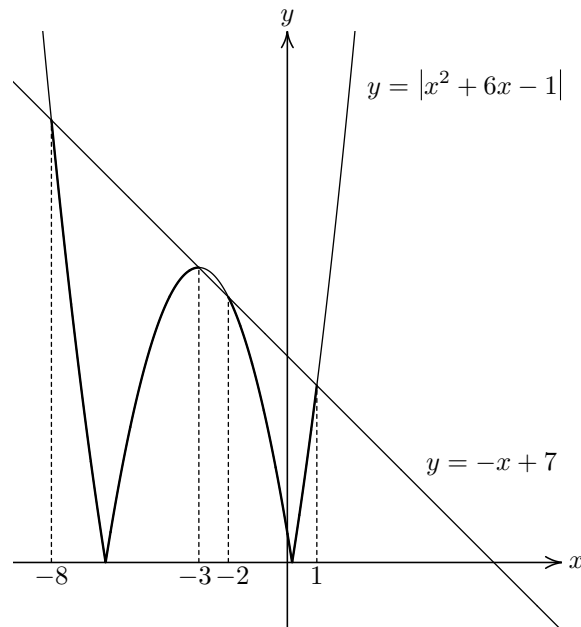
【2024 鹿児島大学】

解説

xy 平面上でグラフの上下関係として捉える。

$$\begin{aligned} x^2 + 6x - 1 &= 7 - x \iff x^2 + 7x - 8 = 0 \\ \iff (x + 8)(x - 1) &= 0 \iff x = -8, 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x^2 - 6x + 1 &= 7 - x \iff x^2 + 5x + 6 = 0 \\ \iff (x + 2)(x + 3) &= 0 \iff x = -2, -3. \end{aligned}$$



求める解は

$$-8 \leq x \leq -3, \quad -2 \leq x \leq 1.$$

7

赤玉 3 個、白玉 5 個の合計 8 個の玉が入っている袋がある。この袋から同時に 3 個の玉を取り出すとき、3 個のうち少なくとも 1 個は赤玉であるという条件の下で、3 個中 2 個が赤玉、1 個が白玉である確率を求めよ。

【2024 立教大学】

解説

事象 E を「3 個のうち少なくとも 1 個は赤玉である」という事象、事象 F を「3 個中 2 個が赤玉、1 個が白玉である」という事象とすると、求める条件付き確率は

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

である。

$P(E)$ は余事象を考えることで、

$$P(E) = 1 - \frac{{}_3C_3}{{}_8C_3} = 1 - \frac{1}{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = 1 - \frac{1}{56} = \frac{55}{56}.$$

また、 $E \cap F = F$ であるので、

$$P(E \cap F) = P(F) = \frac{{}_5C_2 \times {}_3C_1}{{}_8C_3} = \frac{30}{56}.$$

$$\therefore P_E(F) = \frac{30}{\frac{56}{55}} = \frac{30}{55} = \frac{6}{11}.$$

8

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、関数

$$5 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta$$

の最大値と最小値を求めよ。 【2024 三重大学】

解説 半角公式により、

$$\begin{aligned} & 5 \cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta \\ &= 5 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + 2 \cdot \frac{\sin 2\theta}{2} \\ &= \sin 2\theta + \cos 2\theta + 4 \\ &= \sqrt{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right) + 4. \end{aligned}$$

合成

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\frac{\pi}{4} \leq 2\theta + \frac{\pi}{4} \leq \pi + \frac{\pi}{4}$ より、

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1.$$

$$-1 \leq \sqrt{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}.$$

$$3 \leq \sqrt{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right) + 4 \leq 4 + \sqrt{2}.$$

これより、求める最小値は **3** であり、最大値は **$4 + \sqrt{2}$** である。

参考 θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を変化するとき、 $\sin 2\theta + \cos 2\theta$ の最大、最小を調べるのが本問の主旨である。これにはいくつかの手法があるが、ここでは2つ紹介しよう。

まず最初は、内積を用いる解法である。 $2\theta = t$ とおけば、 t が $0 \leq t \leq \pi$ を変化するときの $\sin t + \cos t$ を考えることになる。ここで、 $\vec{a} = (1, 1)$ 、 $\vec{v} = (\cos t, \sin t)$ とすると、

$$\sin t + \cos t = 1 \cdot \cos t + 1 \cdot \sin t = \vec{a} \cdot \vec{v}$$

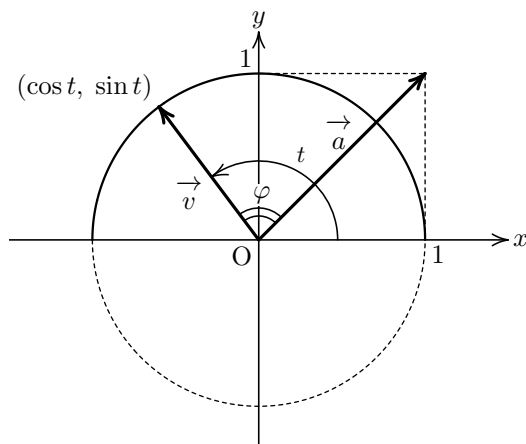
とみることができる。そこで内積の定義に立ち返り、 $\vec{a}$ と $\vec{v}$ のなす角を φ とすれば、

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = |\vec{a}| |\vec{v}| \cos \varphi = \sqrt{2} \cos \varphi$$

となる。ここで、 φ は t によるが、 t が $0 \leq t \leq \pi$ を変化すると、 φ は $0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi$ を動くので、 $\cos \varphi$ は

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos \varphi \leq 1$$

をとり得る。



したがって、 $\sin t + \cos t = \vec{a} \cdot \vec{v}$ のとり得る値の範囲は

$$-1 \leq \sin t + \cos t \leq \sqrt{2}$$

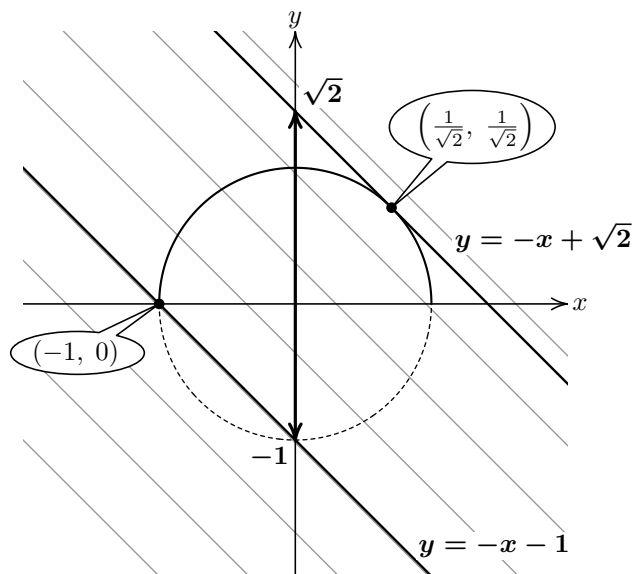
とわかる。

二つ目の解法は、図形と方程式の知識を用いる方法である。

t が $0 \leq t \leq \pi$ を変化するときの $\sin t + \cos t$ を考えたい。点 $(\cos t, \sin t)$ は t が $0 \leq t \leq \pi$ を変化すると、 $t = 0$ のときの $(1, 0)$ から $t = \pi$ のときの $(-1, 0)$ まで単位円周上を反時計回りに半周する。つまり、点 (x, y) が単位円の上半周 $H: x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ を動くとき、 $y + x$ のとり得る値の範囲を考えたい。 $y + x$ が値 k をとるのは xy 平面上では直線 $y = -x + k$ 上のみであることに注意すると、直線 $y = -x + k$ と単位円の上半周 H が共有点をもつような k の値の範囲を考えればよく、図より、 $y + x$ のとり得る値の範囲は

$$-1 \leq y + x \leq \sqrt{2}$$

であることがわかる。



これが $\sin t + \cos t$ ($0 \leq t \leq \pi$) のとり得る値の範囲である。

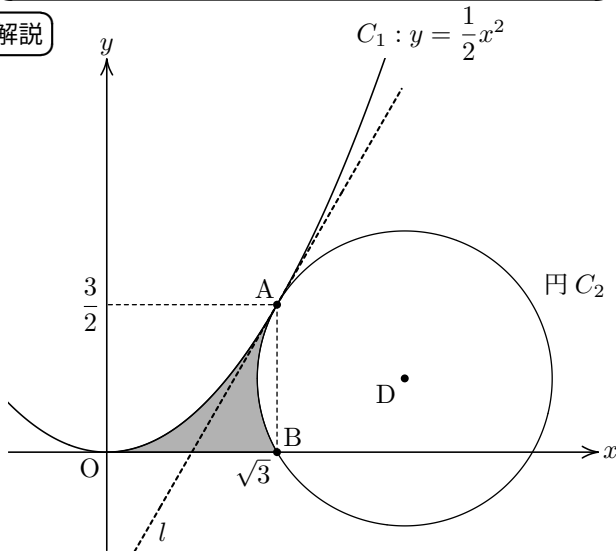
9

座標平面上に放物線 $C_1: y = \frac{1}{2}x^2$ がある。また、 C_1 上の点 $A\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$ における C_1 の接線を l とする。さらに、点 A において l と接し、 $B(\sqrt{3}, 0)$ を通る円を C_2 とする。

- (1) 直線 l の方程式を求めよ。
- (2) 円 C_2 の中心 D の座標を求めよ。
- (3) 曲線 C_1 , C_2 および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

【2024 宮崎大学】

解説



- (1) $\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$ より、接線 l の方程式は

$$y = \sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + \frac{3}{2}$$

すなわち

$$y = \sqrt{3}x - \frac{3}{2}.$$

- (2) 点 D は線分 AB の垂直二等分線 $y = \frac{3}{4}$ 上にあり、また、 A における C_1 の法線 $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - \sqrt{3}) + \frac{3}{2}$ すなわち $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{5}{2}$ 上にもあることから、

$$D\left(\frac{7}{4}\sqrt{3}, \frac{3}{4}\right).$$

- (3) l の傾きが $\tan 60^\circ$ であることから、 $\angle DAB = 60^\circ$ とわかる。これより、三角形 DAB は正三角形であることが

わかる。したがって、円 C_2 の半径は $AB = \frac{3}{2}$ であり、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}x^2 dx - \left\{ (\text{扇形 } DAB) - (\text{正三角形 } DAB) \right\} \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 \right]_0^{\sqrt{3}} - \left\{ \pi \left(\frac{3}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^2 \sin 60^\circ \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{3}{8}\pi - \frac{9}{16}\sqrt{3} \right) \\ &= \frac{17}{16}\sqrt{3} - \frac{3}{8}\pi. \end{aligned}$$

注意 本問のように扇形の面積を調べる必要がある問題の場合、扇形の中心角は“キレイな”角になっているはずである(そうでなければ面積を求めることができない!).

10

等式

$$(\log_4 x)(\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x}) - (\log_8 x^3)^2 + \log_2(8x^3) + 1 = 0$$

を満たす実数 x をすべて求めよ。

【2024 学習院大学】

解説 真数は正であるから、 $x > 0$ が前提となる。このもとで、 $\log_2 x = X$ とおくと、

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{X}{2},$$

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x} = \frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2} \log_2 x}{\frac{1}{2}} = X,$$

$$\log_8 x^3 = \frac{\log_2(x^3)}{\log_2 8} = \frac{3 \log_2 x}{3} = X,$$

$$\log_2(8x^3) = \log_2 8 + \log_2(x^3) = 3 + 3 \log_2 x = 3 + 3X$$

と表されることから、与式は

$$\frac{X}{2} \cdot X - X^2 + (3 + 3X) + 1 = 0$$

すなわち

$$X^2 - 6X - 8 = 0$$

と表され、この X の2次方程式を解くと、

$$X = 3 \pm \sqrt{17}.$$

$$\therefore x = 2^{3 \pm \sqrt{17}} (> 0).$$

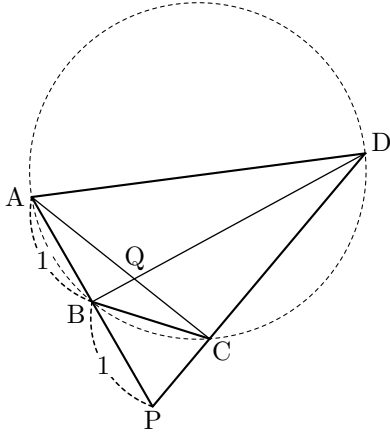
11

四角形 ABCD は円に内接している．辺 AB の延長と辺 DC の延長の交点を P，二つの線分 AC と BD の交点を Q とする． $AB = 1$ ， $BP = 1$ ， $\triangle QDC$ の面積は $\triangle QAB$ の面積の 4 倍である．

- (1) 線分 PC の長さを求めよ．
- (2) $\triangle QBC$ の面積は $\triangle QAB$ の面積の何倍であるかを求めよ．

【2024 産業医科大学】

解説



- (1) 三角形 QAB と三角形 QDC が相似であることに注目する．その面積比が $1 : 4$ であることから，相似比が $1 : 2$ であるとわかる．これより，

$$DC = 2 \times AB = 2.$$

$PC = x$ とおく．方べきの定理から，

$$x(x + 2) = 1 \times (1 + 1).$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0.$$

$$\therefore CP = x = \sqrt{3} - 1.$$

- (2) 三角形 APD に着目し，B が AP の中点，C が PD を $(\sqrt{3} - 1) : 2$ に内分する点であることから，^{メネラウス} Menelaus の定理により，

$$AQ : QC = \sqrt{3} + 1 : 2.$$

$$\therefore \frac{\triangle QBC}{\triangle QAB} = \frac{QC}{AQ} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} - 1.$$

注意 本編 p.76 でも注意したように，方べきの定理にまつわる構図では三角形の相似がポイントになる．なお，(2) では，本編 p.103 で解説した加重重心を利用すると， $AB : BP = 1 : 1$ であることから，

$$(A \text{ への加重}) : (P \text{ への加重}) = 1 : 1$$

とし， $PC : CD = (\sqrt{3} - 1) : 2$ であることから，

$$(P \text{ への加重}) : (D \text{ への加重}) = 2 : (\sqrt{3} - 1)$$

とすればよく，

$$(A \text{ への加重}) : (P \text{ への加重}) : (D \text{ への加重}) = 2 : 2 : (\sqrt{3} - 1)$$

とすればよい．これより，

$$\begin{aligned} AQ : QC &= (P \text{ への加重} + D \text{ への加重}) : (A \text{ への加重}) \\ &= (\sqrt{3} - 1 + 2) : 2 = \sqrt{3} + 1 : 2 \end{aligned}$$

と求められる．ここでの計算は，メネラウスの定理の適用に他ならず，解答には「メネラウスの定理により」と書けばよい．