

1

1 の 3 乗根のうち、虚数であるものの 1 つを ω とするとき、 $\omega^5 + \omega^4 + 3$ の値を求めよ。

【2025 大分大学】

解説

$$\begin{aligned} x^3 = 1 &\iff x^3 - 1 = 0 \\ &\iff (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \end{aligned}$$

より、 ω は

$$\omega^3 = 1, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

を満たす。これより、

$$\begin{aligned} \omega^5 + \omega^4 + 3 &= \omega^3 \cdot \omega^2 + \omega^3 \cdot \omega + 3 \\ &= \omega^2 + \omega + 1 + 2 \\ &= 0 + 2 = 2. \end{aligned}$$

注意 1 の虚数立方根を ω という。 ω は $x^2 + x + 1 = 0$ の解であるが、

$$\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \text{か} \quad \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

のどちらかが一方を指す。どちらであったとしても、次が成り立つ。

$$\omega^3 = 1, \quad \omega^2 + \omega + 1 = 0, \quad \omega^2 = \frac{1}{\omega} = \bar{\omega}.$$

2

xy 平面上に円 $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ と直線 $\ell: 3x + 4y = k$ がある。 C と ℓ が共有点をもたないような定数 k の値の範囲を求めよ。

【2025 山形大学】

解説

C は中心が $(2, 1)$ で半径が 1 の円であり、 C と $\ell: 3x + 4y - k = 0$ が共有点をもたない条件は

$$(C \text{ の中心 } (2, 1) \text{ と } \ell \text{ の距離}) > (C \text{ の半径})$$

つまり

$$\frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} > 1.$$

$$|10 - k| > 5.$$

$$k - 10 < -5, \quad 5 < k - 10.$$

$$\therefore k < 5, \quad 15 < k.$$

3

四面体 $OABC$ において、 $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$ とおく。線分 OA を $1:2$ に内分する点を D 、線分 OB を $3:2$ に内分する点を E 、線分 OC を $1:1$ に内分する点を F とする。また三角形 ABC の重心を G とし、四面体 $OABC$ の体積を V とする。

(1) 3 点 D, E, F を含む平面と線分 OG との交点を P とする。 $\vec{p} = \vec{OP}$ とおくと、 $\vec{p}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 四面体 $ODEF$ の体積を V を用いて表せ。

(3) 四面体 $GDEF$ の体積を V を用いて表せ。

【2025 信州大学】

解説

$$\vec{OD} = \frac{1}{3}\vec{a}, \quad \vec{OE} = \frac{3}{5}\vec{b}, \quad \vec{OF} = \frac{1}{2}\vec{c} \text{ であり、}$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}.$$

(1) 点 P は線分 OG 上にあるので、 $0 < k < 1$ を満たす k により、

$$\vec{OP} = k\vec{OG}$$

と表せる。これより、

$$\vec{p} = \frac{k}{3}\vec{a} + \frac{k}{3}\vec{b} + \frac{k}{3}\vec{c}. \quad \dots \textcircled{1}$$

また、点 P が平面 DEF 上にあることから、実数 s, t を用いて、

$$\vec{DP} = s\vec{DE} + t\vec{DF}$$

と表せる。これより、

$$\begin{aligned} \vec{p} &= (1-s-t)\vec{OD} + s\vec{OE} + t\vec{OF} \\ &= \frac{1-s-t}{3}\vec{a} + \frac{3s}{5}\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c}. \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるから、 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ により、

$$\begin{cases} \frac{1-s-t}{3} = \frac{k}{3}, \\ \frac{3s}{5} = \frac{k}{3}, \\ \frac{t}{2} = \frac{k}{3}. \end{cases}$$

$$\therefore k = \frac{9}{20}, \quad s = \frac{1}{4}, \quad t = \frac{3}{10}.$$

$$(k = \frac{9}{20} \text{ は } 0 < k < 1 \text{ を満たす}).$$

$$\therefore \vec{p} = \frac{3}{20}\vec{a} + \frac{3}{20}\vec{b} + \frac{3}{20}\vec{c}.$$

(2) 四面体 $ODEF$ の体積は

$$\underbrace{\frac{OD}{OA} \cdot \frac{OE}{OB} \cdot \frac{OF}{OC}}_{\text{底面積の比}} \times V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \times V = \frac{1}{10}V.$$

- (3) (2) の四面体 ODEF と四面体 GDEF は底面 DEF を共有しており、高さの比が $OP : PG$ である。この高さの比は (1) での $k = \frac{9}{20}$ により、 $OP : PG = 9 : 11$ であるので、四面体 GDEF の体積は

$$\frac{11}{9} \times (\text{四面体 ODEF の体積}) = \frac{11}{9} \times \frac{1}{10} V = \frac{11}{90} V.$$

4

$(x - 5y + 2z)^7$ の展開式における $x^4 y^2 z$ の係数を求めよ。 【2025 福岡教育大学】

解説

$(x - 5y + 2z)^7$ の展開式における $x^4 y^2 z$ の項は ${}^7C_1 \times {}^6C_2 \times x^4 \cdot (-5y)^2 \cdot (2z) = 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot (-5)^2 \cdot 2 \times x^4 y^2 z$ より、 $x^4 y^2 z$ の係数は

$$7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot (-5)^2 \cdot 2 = \mathbf{5250}.$$

5

- (1) 2 個のさいころの同時に投げたとき、少なくとも 1 つの奇数の目が出る確率を求めよ。
 (2) 2 個のさいころの同時に投げたとき、出た目の和が 4 以下となる確率を求めよ。
 (3) 3 個のさいころの同時に投げたとき、出た目の積が 8 の倍数となる確率を求めよ。

【2025 高知大学】

解説

- (1) 余事象「2 個のサイコロがともに偶数の目を出す」を考えて、求める確率は

$$1 - \frac{3^2}{6^2} = \frac{3}{4}.$$

- (2) 目の出方は

$$(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)$$

の全部で 6^2 通りあり、これらが同様に確からしく、そのうち、出た目の和が 4 以下となるのは

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1)$$

の 6 通りのみであるから、求める確率は

$$\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}.$$

- (3) 1, 3, 5 のいずれかの目が出る事象を Z , 2, 6 のいずれかの目が出る事象を I , 4 の目が出る事象を N とす

る。余事象は次のいずれかの場合である。

- (i) Z が 3 回起こる。
 (ii) I が 1 回起こり、 Z が 2 回起こる。
 (iii) I が 2 回起こり、 Z が 1 回起こる。
 (iv) T が 1 回起こり、 Z が 2 回起こる。

- (i) となる確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

- (ii) となる確率は

$${}_3C_1 \left(\frac{2}{6}\right)^1 \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

- (iii) となる確率は

$${}_3C_1 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{3}{6}\right)^1 = \frac{1}{6}.$$

- (iv) となる確率は

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{1}{8}.$$

よって、求める確率は

$$1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{3}.$$

6

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、

$$f(\theta) = \sin 2\theta + \sqrt{2} \sin \theta + \sqrt{2} \cos \theta$$

とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ として、 $f(\theta)$ を t を用いて表せ。
 (2) t のとり得る値の範囲を求めよ。
 (3) $f(\theta)$ の最大値および最小値と、そのときの θ の値をそれぞれ求めよ。

【2025 鳥取大学】

解説

- (1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ の両辺を 2 乗して、

$$\begin{aligned} t^2 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ = 1 + \sin 2\theta \end{aligned}$$

を得る。ゆえに、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= t^2 - 1 + \sqrt{2}(\sin \theta + \cos \theta) \\ &= t^2 + \sqrt{2}t - 1. \end{aligned}$$

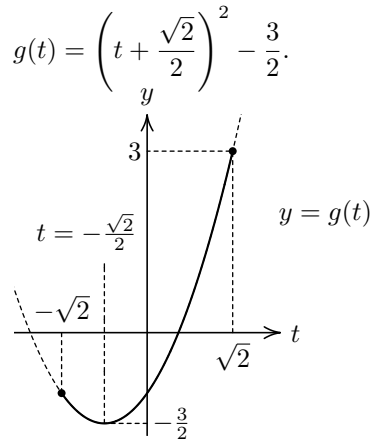
(2)

$$\begin{aligned} t &= \sin \theta + \cos \theta \\ &= \sqrt{2} \left(\sin \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ をとり得るとき、 t のとり得る値の範囲は

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$

(3) (1) より、 $g(t) = t^2 + \sqrt{2}t - 1$ とおくと、 $f(\theta) = g(t)$ であり、



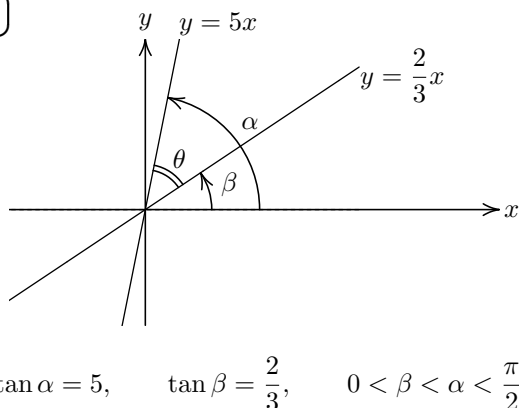
$f(\theta)$ は $t = \sqrt{2}$ のとき、最大値 **3** をとり、 $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき、最小値 $-\frac{3}{2}$ をとる。

$t = \sqrt{2}$ となるのは、 $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ のとき、すなわち、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ のときであり、 $t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ となるのは、 $\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{7}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$ のとき、すなわち、 $\theta = \frac{11}{12}\pi$, $\frac{19}{12}\pi$ のときである。

7

2 直線 $y = 5x$, $y = \frac{2}{3}x$ のなす角 θ を求めよ。ただし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。 【2025 大分大学】

解説



$$\tan \alpha = 5, \quad \tan \beta = \frac{2}{3}, \quad 0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たす α, β に対し、2 直線のなす角 θ は

$$\theta = \alpha - \beta$$

である。これより、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{5 - \frac{2}{3}}{1 + 5 \cdot \frac{2}{3}} = 1. \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

8

$x^2 - xy + x - y = 7$ を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ。 【2025 東京都市大学】

解説

$$x^2 - xy + x - y = 7 \iff (x+1)(x-y) = 7$$

より、

$x+1$	-7	-1	1	7
$x-y$	-1	-7	7	1

これより、

x	-8	-2	0	6
y	-7	5	-7	5

9

$P(x)$ を多項式とする。 $(x-1)P(x)$ を $x-3$ で割ると余りが 14, $P(x)$ を x^2+1 で割ると余りが $-x$ である。

(1) $P(x)$ を $x-3$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) $P(x)$ を x^2+1 で割ったときの商を $Q(x)$ とする。

$Q(x)$ を $x-3$ で割ったときの余りを求めよ。

(3) $P(x)$ を $(x^2+1)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ。

【2025 津田塾大学】

解説

仮定から、ある多項式 $q(x)$ を用いて、

$$(x-1)P(x) = (x-3)q(x) + 14, \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。

(1) 剰余の定理により、 $P(x)$ を $x-3$ で割ったときの余りは $P(3)$ である。① に $x=3$ を代入すると、

$$2P(3) = 14.$$

$$\therefore P(3) = 7.$$

ゆえに、求める余りは

$$7.$$

(2) 仮定により、

$$P(x) = (x^2 + 1)Q(x) + (-x) \quad \cdots \textcircled{2}$$

剰余の定理により、 $Q(x)$ を $x - 3$ で割ったときの余りは $Q(3)$ である。② に $x = 3$ を代入すると、

$$P(3) = 10Q(3) - 3.$$

(1) より、 $P(3) = 7$ であるから、

$$\therefore Q(3) = 1.$$

ゆえに、求める余りは

$$1.$$

(3) 求める余りは高々 2 次の多項式であり、その余りを $x^2 + 1$ で割ると、商は定数で、余りは $-x$ のはずであるので、定数 k と多項式 $A(x)$ を用いて、

$$P(x) = (x^2 + 1)(x - 3)A(x) + \underbrace{k(x^2 + 1) + (-x)}_{\text{求めたい余り}}$$

と表せる。 $x = 3$ を代入し、 $P(3) = 7$ であることを用いると、

$$7 = 10k - 3.$$

$$\therefore k = 1.$$

よって、求める余りは

$$1 \cdot (x^2 + 1) + (-x) = x^2 - x + 1.$$

10

n を 1 より大きい整数とする。不等式

$$\frac{1}{\log_2 5} + \frac{2}{\log_n 5} < 4$$

を満たす最大の n を求めよ。 【2025 学習院大学】

解説

底を 5 に変換すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 5} + \frac{2}{\log_n 5} < 4 &\iff \log_5 2 + 2 \cdot \log_5 n < 4 \\ &\iff \log_5 (2n^2) < 4 \\ &\iff 2n^2 < 5^4 (= 625). \end{aligned}$$

n	10	15	16	17	18	19
$2n^2$	200	450	512	578	648	722

よって、求める n は

$$n = 17.$$

11

座標平面において、 $y = x^2 - 1$ で表される放物線を C とする。 C 上の点 P における C の接線を ℓ とする。ただし、点 P は y 軸上にはないものとする。 O を原点とし、放物線 C と線分 OP および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 、放物線 C と接線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を T とする。 $S - T$ の最大値を求めよ。 【2025 大阪大学】

解説

構図の y 軸対称性から、 P の x 座標は正として考えてよい。

$p > 0$ とし、 $P(p, p^2 - 1)$ とおくと、

$$\ell : y = 2px - p^2 - 1.$$

ℓ と y 軸の交点を Q とすると、 $Q(0, -(p^2 + 1))$ であり、

$$S + T = \triangle POQ = \frac{1}{2}(p^2 + 1)p.$$

また、

$$T = \int_0^p (x - p)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x - p)^3 \right]_0^p = \frac{1}{3}p^3.$$

これより、

$$\begin{aligned} S - T &= (S + T) - 2T \\ &= \frac{1}{2}(p^2 + 1)p - 2 \cdot \frac{1}{3}p^3 \\ &= -\frac{1}{6}(p^3 - 3p). \end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{f(p) \text{ とおく}}$

$$f'(p) = -\frac{1}{6}(3p^2 - 3) = -\frac{1}{2}(p^2 - 1)$$

より、 $f(p)$ の $p > 0$ における増減は次のようになる。

p	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(p)$		+	0	-
$f(p)$		$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$

これより、 $S - T$ の最大値は

$$\frac{1}{3}.$$

参考

接線 ℓ 式は微分法でもよいし、本編の p.33 など で解説したように多項式の除法によって、 $(x - p)^2$ で割った余りとして求めてもよい。