

A 1

2 点 $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ を焦点とし、焦点からの距離の和が 6 である楕円を C とする. 点 $P(-13, -2)$ から C へ引いた接線の傾きを求めよ.

また, $f(\theta) = \frac{8 - 3\sin^2 \theta}{1 + \sin \theta \cos \theta} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$ の最大値と最小値を求めよ. 【2024 信州大学】

解説 楕円 C の焦点が x 軸上にあり、楕円の中心が原点であることから、

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

とおける. 条件から、

$$\sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{2}, \quad 2a = 6.$$

$$\therefore a = 3, \quad b = 1.$$

これより、楕円 C の式は

$$C: \frac{x^2}{9} + y^2 = 1.$$

ここで、直線 $y = mx + n$ と C の式から y を消去すると、

$$\frac{x^2}{9} + (mx + n)^2 = 1$$

すなわち

$$\left(m^2 + \frac{1}{9}\right)x^2 + 2mnx + n^2 - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となるから、直線 $y = mx + n$ と C が接する条件は、

$$(\textcircled{1} \text{の判別式}) = 0$$

すなわち

$$(mn)^2 - \left(m^2 + \frac{1}{9}\right)(n^2 - 1) = 0.$$

$$\therefore 9m^2 - n^2 + 1 = 0. \quad \cdots \textcircled{2}$$

直線 $y = mx + n$ が点 $P(-13, 2)$ を通るとき、

$$2 = -13m + n$$

すなわち

$$n = 13m - 2$$

が成り立つので、これを $\textcircled{2}$ に代入して、

$$9m^2 - (13m - 2)^2 + 1 = 0.$$

$$160m^2 - 52m + 3 = 0.$$

$$(40m - 3)(4m - 1) = 0.$$

$$\therefore m = \frac{3}{40}, \quad \frac{1}{4}.$$

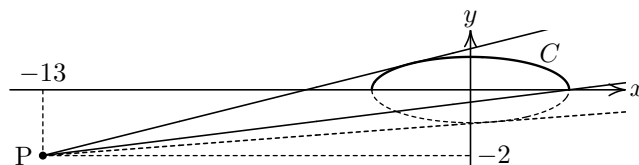
また、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{8 - 3\sin^2 \theta}{1 + \sin \theta \cos \theta} = \frac{8 - 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2}}{1 + \frac{\sin 2\theta}{2}} \\ &= \frac{13 + 3\cos 2\theta}{2 + \sin 2\theta} = \frac{3\cos 2\theta - (-13)}{\sin 2\theta - (-2)} \end{aligned}$$

より、

$$\frac{1}{f(\theta)} = \frac{\sin 2\theta - (-2)}{3\cos 2\theta - (-13)}$$

は楕円 C 上の点 $(3\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ と点 $(-13, -2)$ を通る直線の傾きを表している. θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を動くとき、 2θ は $0 \leq 2\theta \leq \pi$ を動くので、点 $(3\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ は楕円 C の $y \geq 0$ の部分をくまなく動く.



傾き $\frac{1}{f(\theta)}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{1}{8} \leq \frac{1}{f(\theta)} \leq \frac{1}{4}$$

であるから、 $f(\theta)$ のとり得る値の範囲は

$$4 \leq f(\theta) \leq 8$$

とわかる. よって、 $f(\theta)$ の

最大値は 8、最小値は 4.

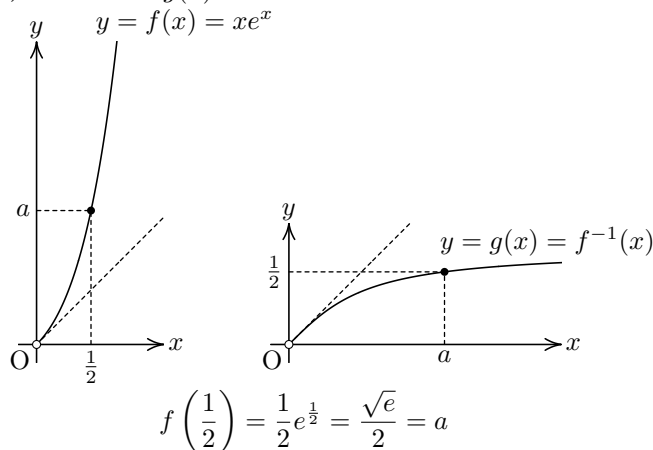
A 2

$f(x) = xe^x \quad (x > 0)$ の逆関数を $g(x)$ とする.

$a = \frac{\sqrt{e}}{2}$ とするとき、 $g(a)$ 、 $g'(a)$ を求めよ.

【2024 東京医科大学】

解説 $f(x) = xe^x \quad (x > 0)$ は単調増加関数であるので、その逆関数 $g(x)$ も単調増加関数である.



であるから,

$$g(a) = f^{-1}(a) = \frac{1}{2}.$$

また,

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1)e^x$$

より,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{e}}{2}$$

であるから, この逆数をとって,

$$g'(a) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3\sqrt{e}}.$$

A 3

曲線 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\log x$ の $1 \leq x \leq 2$ の部分の長さを求めよ. 【2024 小樽商科大学】

解説

$$y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

より,

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{x} \right)^2.$$

よって, 求める長さは

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx &= \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{x} \right)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 + \log x \right]_1^2 \\ &= \frac{3}{4} + \frac{\log 2}{2}. \end{aligned}$$

A 4

$\int_{-1}^0 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^x(x^2 - x^4)}{1 + e^x} dx$ が成り立つことを示し, 定積分 $\int_{-1}^1 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x}$ を求めよ. 【2024 長崎大学】

解説

$I = \int_{-1}^0 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx$ において, $-x = t$ とおく置換積分を行うと,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx \\ &= \int_1^0 \frac{t^2 - t^4}{1 + e^{-t}} (-1) dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^2 - t^4}{1 + e^{-t}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^t(t^2 - t^4)}{e^t + 1} dt = \int_0^1 \frac{e^x(x^2 - x^4)}{1 + e^x} dx. \end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx &= \underbrace{\int_{-1}^0 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx}_I + \int_0^1 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^x(x^2 - x^4)}{1 + e^x} dx + \int_0^1 \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{e^x(x^2 - x^4)}{1 + e^x} + \frac{x^2 - x^4}{1 + e^x} \right\} dx \\ &= \int_0^1 \frac{(1 + e^x)(x^2 - x^4)}{1 + e^x} dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

参考

大昔の有名な類題を紹介しておこう.

定積分 $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + e^x} dx$ の値を求めよ. 【1979 学習院大学】

$\frac{2}{15}$ 

A 5

次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

$$f(x) = x + \int_0^\pi f(t) \cos(x+t) dt.$$

【2024 信州大学】

解説

Fredholm 型の積分方程式である. 加法定理により,

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi f(t) \cos(x+t) dt \\ &= \int_0^\pi f(t) (\cos x \cos t - \sin x \sin t) dt \\ &= \cos x \int_0^\pi f(t) \cos t dt - \sin x \int_0^\pi f(t) \sin t dt \end{aligned}$$

と表せるので, 条件式は

$$f(x) = x + \cos x \int_0^\pi f(t) \cos t dt - \sin x \int_0^\pi f(t) \sin t dt$$

とかける。ここで、

$$A = \int_0^\pi f(t) \cos t dt, \quad B = \int_0^\pi f(t) \sin t dt$$

とおくと、 A, B は定数であり、

$$f(x) = x + A \cos x - B \sin x.$$

$$C = \int_0^\pi \cos^2 t dt, \quad S = \int_0^\pi \sin^2 t dt, \quad M = \int_0^\pi \sin t \cos t dt,$$

$$D = \int_0^\pi t \cos t dt, \quad E = \int_0^\pi t \sin t dt$$

とおくと、

$$\begin{cases} A = D + AC - BM, \\ B = E + AM - BS. \end{cases} \quad \dots (*)$$

そこで、 C, S, M, D, E の値を求め、未知数 A, B についての連立方程式を解こう。

$$\begin{aligned} C &= \int_0^\pi \cos^2 t dt = \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi \sin^2 t dt = \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\pi \sin t \cos t dt = \int_0^\pi \frac{\sin 2t}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

であり、部分積分により、

$$\begin{aligned} D &= \int_0^\pi t \cos t dt \\ &= \left[t \cdot \sin t - 1 \cdot (-\cos t) \right]_0^\pi = -2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\pi t \sin t dt \\ &= \left[t \cdot (-\cos t) - 1 \cdot (-\sin t) \right]_0^\pi = \pi. \end{aligned}$$

これより、 $(*)$ は

$$\begin{cases} A = -2 + \frac{\pi}{2}A - 0 \cdot B, \\ B = \pi + 0 \cdot A - \frac{\pi}{2}B \end{cases}$$

となり、(実質は、“連立”ではない!)

$$A = \frac{4}{\pi - 2}, \quad B = \frac{2\pi}{\pi + 2}.$$

したがって、求める $f(x)$ は

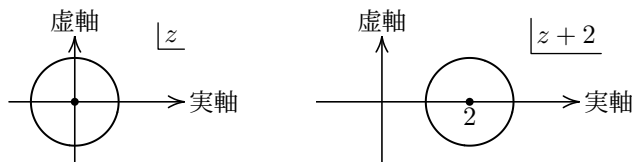
$$f(x) = x + \frac{4}{\pi - 2} \cos x - \frac{2\pi}{\pi + 2} \sin x.$$

A 6

複素数平面上の点 z に対して、 $w = (1 + 2i)(z + 2)$ で表される点 w がある。点 z が単位円上を動くとき、 $|w + 1|$ の最大値を求めよ。 【2024 兵庫医科大学】

解説 $|w + 1| = |w - (-1)|$ は点 w と点 -1 との距離を表す。

点 z に対して、点 $z + 2$ は実軸方向に 2 だけ移動した点であり、点 $z + 2$ の軌跡は単位円を実軸方向に 2 だけ移動した円である。その中心は点 2 であり、半径は変わらず 1 である。

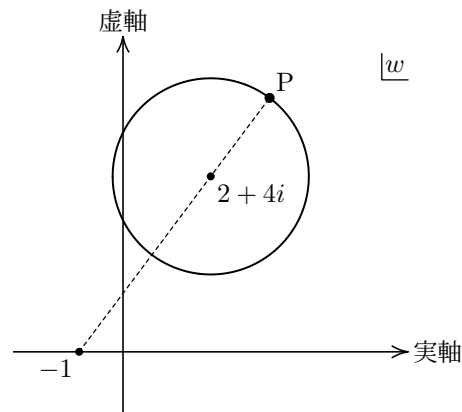


点 $w = (1 + 2i)(z + 2)$ は点 $z + 2$ を原点中心に $|1 + 2i| = \sqrt{5}$ 倍の拡大、および、 $\tan \theta = 2$ を満たす鋭角 θ だけ反時計回りに回転させた点であり、点 w の軌跡は

中心が $(1 + 2i) \cdot 2 = 2 + 4i$,

半径が $1 \times \sqrt{5} = \sqrt{5}$

の円である。



したがって、 $|w + 1|$ が最大となるのは w が図の点 P の位置を表す複素数のときであり、 $|w + 1|$ の最大値は

$$\sqrt{3^2 + 4^2} + \sqrt{5} = 5 + \sqrt{5}.$$

参考 類題が本編 p.65 にある。

A 7

定積分 $\int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{e^{3x} + 4e^{2x} + e^x}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1} dx$ を求めよ.

【2024 横浜国立大学】

解説

$I = \int_0^{\log \sqrt{3}} \frac{e^{3x} + 4e^{2x} + e^x}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1} dx$ において, $e^x = t$ とおく置換積分を行うと, $e^x dx = dt$ により,

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2 + 4t + 1}{t^4 + 2t^2 + 1} dt \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2 + 4t + 1}{(t^2 + 1)^2} dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2 + 1 + 4t}{(t^2 + 1)^2} dt \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{t^2 + 1} + \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} \right\} dt \\ &= \underbrace{\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2 + 1} dt}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} dt}_{I_2}. \end{aligned}$$

第 1 項の積分 I_1 では, $t = \tan \theta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと,

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \underbrace{\frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta}}_{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

となり, 第 2 項の積分 I_2 では,

$$\left(\frac{1}{t^2 + 1} \right)' = -(t^2 + 1)^{-2} \cdot 2t = \frac{-2t}{(t^2 + 1)^2}$$

に注目すると,

$$I_2 = \left[-\frac{2}{t^2 + 1} \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

となる. よって,

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}.$$

Coffee Break

本編 p.113 や p.119 で微積分の数学 IAIIB への応用を紹介したが, ここでもう一つ紹介しよう.

数列の和 $S = \sum_{k=1}^n kr^{k-1}$ (r は 1 でない定数) の計算で, 微分法を用いる方法がある.

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

とおく. この n 次関数 $f(x)$ の導関数は

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

より, 求める S は $f'(r)$ である. $f(x)$ は初項 1, 公比 x , 項数 $(n+1)$ の等比数列の和と捉えられ, $f(x)$ の定義域を $x \neq 1$ に制限 ($x = 1$ だけ除外) すると,

$$f(x) = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

となり, $x \neq 1$ で微分可能で, 商の微分公式から,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(n+1)x^n \cdot (x-1) - (x^{n+1} - 1) \cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

これより, $x \neq 1$ において,

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = f'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

であるから,

$$S = \sum_{k=1}^n kr^{k-1} = f'(r) = \frac{nr^{n+1} - (n+1)r^n + 1}{(r-1)^2}$$

と求めることができる.