

1 複素数平面において、点 1 を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を C とする。次の問いに答えよ。

- (1) 点 α が円 C と虚軸との交点であるとき、 $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ を求めよ。
- (2) 円 C 上の点 z に対し、点 $-\frac{1}{z}$ も円 C 上にあることを示せ。
- (3) 円 C 上の点 z に対し、 $w = z + \frac{1}{z}$ とする。複素数 w , z は

$$|w - 2| = \frac{2}{|z|}$$

を満たすことを示せ。

- (4) 円 C 上の点 z に対し、(3) で定めた複素数 w は

$$|w - 2||w + 2| = 4$$

を満たすことを示せ。

2 各項が自然数である 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を等式

$$a_n + b_n\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) すべての自然数 n について、

$$a_n - b_n\sqrt{5} = (2 - \sqrt{5})^n$$

が成り立つことを示せ。

- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ を求めよ。

3 k を定数とする。曲線 $y = e^{\sqrt{x}}$ と直線 $y = kx$ が 1 点 P で接しているとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 $y = e^{\sqrt{x}}$ の凹凸、変曲点を調べ、その概形をかけ。
- (2) 定数 k の値と点 P の座標を求めよ。
- (3) 曲線 $y = e^{\sqrt{x}}$ と直線 $y = kx$ および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

4 原点を O とする座標平面において、直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ の $x > 0$ の部分を l 、直線 $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ の $x > 0$ の部分を m とする。点 P は l 上を、点 Q は m 上を、 $PQ = 2$ を満たしながら動くとする。

- (1) $\angle OPQ = t$ とするとき、 P , Q の座標を t を用いて表せ。
- (2) 線分 PQ の中点 M の軌跡を求め、座標平面上に図示せよ。

5 自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos \frac{x}{3} \quad (x \geq 0)$$

で定める。

- (1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は、ただ 1 つの実数解をもつことを示せ。
- (2) (1) における実数解を a_n とおくと、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ を求めよ。