B 1

複素数平面において，点 1 を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円を C とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 α が円 C と虚軸との交点であるとき，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ を求めよ．

(2) 円 C 上の点 z に対し，点 $-\dfrac{1}{z}$ も円 C 上にあることを示せ．

(3) 円 C 上の点 z に対し，$w=z+\dfrac{1}{z}$ とする．複素数 w，z は

$$|w-2|=\frac{2}{|z|}$$

を満たすことを示せ．

(4) 円 C 上の点 z に対し，(3) で定めた複素数 w は

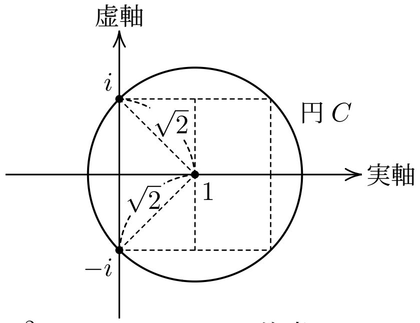
$$|w-2||w+2|=4$$

を満たすことを示せ．　【2024 広島大学】

解説

(1) 点 α は円 C と虚軸との交点であり，図より，

$$\alpha=\pm i.$$



このとき，$\alpha^2=-1$ であることに注意すると，

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha^2+1}{\alpha}=\mathbf{0}.$$

(2) 点 z が円 C 上にあるとき，すなわち，$|z-1|=\sqrt{2}$ を満たすとき，点 $-\dfrac{1}{z}$ も円 C 上にあること，すなわち，$\left|-\dfrac{1}{z}-1\right|=\sqrt{2}$ を満たすことを示せばよい．

$|z-1|=\sqrt{2}$ より，

$$|z-1|^2=2.$$
$$(z-1)(\overline{z}-1)=2.$$
$$z\overline{z}-z-\overline{z}+1=2.$$
$$z+\overline{z}+1=z\overline{z}. \qquad \cdots①$$

このとき，

$$\left|-\frac{1}{z}-1\right|^2=\left|\frac{1+z}{z}\right|^2=\frac{|z+1|^2}{|z|^2}$$
$$=\frac{(z+1)(\overline{z}+1)}{z\overline{z}}=\frac{z\overline{z}+z+\overline{z}+1}{z\overline{z}}$$

であり，① から，

$$\left|-\frac{1}{z}-1\right|^2=\frac{z\overline{z}+z\overline{z}}{z\overline{z}}=2$$

が成り立ち，$\left|-\dfrac{1}{z}-1\right|=\sqrt{2}$ の成立がわかるので，点 $-\dfrac{1}{z}$ も円 C 上にある．■

(3) $w=z+\dfrac{1}{z}$ より，

$$|w-2|=\left|z+\frac{1}{z}-2\right|=\left|\frac{z^2-2z+1}{z}\right|=\frac{|z-1|^2}{|z|}$$

であり，点 z が円 C 上にあるとき，すなわち，$|z-1|=\sqrt{2}$ を満たすとき，

$$|w-2|=\frac{|z-1|^2}{|z|}=\frac{(\sqrt{2})^2}{|z|}=\frac{2}{|z|}$$

が成り立つ．■

(4) $w=z+\dfrac{1}{z}$ より，

$$|w+2|=\left|z+\frac{1}{z}+2\right|=\left|\frac{z^2+2z+1}{z}\right|=\frac{|z+1|^2}{|z|}$$

であり，点 z が円 C 上にあるとき，(2) より，

$$|z+1|^2=2|z|^2$$

が成り立つことから，

$$|w+2|=\frac{|z+1|^2}{|z|}=\frac{2|z|^2}{|z|}=2|z|$$

が成り立つ．これと (3) より，

$$|w-2||w+2|=\frac{2}{|z|}\times 2|z|=4$$

が成り立つ．■

参考　z から w を対応させる変換はJoukowski（ジューコフスキー）変換と呼ばれ (本編 p.137 参照)，これにより円 C は 2 点 ± 2 からの距離の積が一定である曲線，すなわち，レムニスケート (本編 p.70 参照) に移る．

B 2

各項が自然数である 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を等式

$$a_n+b_n\sqrt{5}=\left(2+\sqrt{5}\right)^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) すべての自然数 n について，

$$a_n-b_n\sqrt{5}=\left(2-\sqrt{5}\right)^n$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ を求めよ．　【2024 香川大学】

解説

(1) $a_1=2$，$b_1=1$ であり，

$$\begin{aligned} a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{5} &= (2+\sqrt{5})^{n+1} \\ &= (2+\sqrt{5})^n(2+\sqrt{5}) \\ &= (a_n+b_n\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) \\ &= (2a_n+5b_n)+(a_n+2b_n)\sqrt{5}. \end{aligned}$$

ここで，a_n，b_n，a_{n+1}，b_{n+1} は自然数であるので，

$a_{n+1}=2a_n+5b_n$，$b_{n+1}=a_n+2b_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$

が成り立つ．このことに注意して，すべての自然数 n について，

$$a_n-b_n\sqrt{5}=\left(2-\sqrt{5}\right)^n \qquad \cdots(*)$$

が成り立つことを数学的帰納法によって示そう．

- $n=1$ のとき，

$$a_1-b_1\sqrt{5}=2-1\cdot\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^1$$

より，$(*)$ は確かに成立している．

- $n=k$ のときの $(*)$ の成立を仮定すると，

$$\begin{aligned} (2-\sqrt{5})^{k+1} &= (2-\sqrt{5})^k(2-\sqrt{5}) \\ &= (a_k-b_k\sqrt{5})(2-\sqrt{5}) \\ &= (2a_k+5b_k)-(a_k+2b_k)\sqrt{5} \\ &= a_{k+1}-b_{k+1}\sqrt{5} \end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときにも $(*)$ は成り立つ．ゆえに，すべての自然数 n に対して $(*)$ が成り立つことが示された．■

(2)

$$\begin{cases} a_n+b_n\sqrt{5}=\left(2+\sqrt{5}\right)^n, \\ a_n-b_n\sqrt{5}=\left(2-\sqrt{5}\right)^n \end{cases}$$

により，

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{2}\left\{\left(2+\sqrt{5}\right)^n+\left(2-\sqrt{5}\right)^n\right\}, \\ b_n=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left\{\left(2+\sqrt{5}\right)^n-\left(2-\sqrt{5}\right)^n\right\} \end{cases}$$

であるから，

$$\frac{a_n}{b_n}=\sqrt{5}\cdot\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)^n+\left(2-\sqrt{5}\right)^n}{\left(2+\sqrt{5}\right)^n-\left(2-\sqrt{5}\right)^n}.$$

ここで，$r=\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ とおくと，r は $|r|<1$ を満たす定数であるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}r^n=0$ である．これより，

$$\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)^n+\left(2-\sqrt{5}\right)^n}{\left(2+\sqrt{5}\right)^n-\left(2-\sqrt{5}\right)^n}=\frac{1+r^n}{1-r^n}\to 1\ \ (n\to\infty)$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\boldsymbol{\sqrt{5}}.$$

参考　本問は

$$\sqrt{5}=2.2360679774997896964\cdots$$

の有理数による近似を与えている．

n	a_n	b_n	$\dfrac{a_n}{b_n}$
1	2	1	**2**
2	9	4	**2.2**5
3	38	17	**2.23**5294$\cdots$
4	161	72	**2.236**1111$\cdots$
5	682	305	**2.23606**557377$\cdots$
6	2889	1292	**2.23606**811145$\cdots$
7	12238	5473	**2.23606797**0034$\cdots$
8	51841	23184	**2.236067977**915804$\cdots$

B **3**

k を定数とする．曲線 $y=e^{\sqrt{x}}$ と直線 $y=kx$ が 1 点 P で接しているとき，次の問に答えよ．

(1) 曲線 $y=e^{\sqrt{x}}$ の凹凸，変曲点を調べ，その概形をかけ．

(2) 定数 k の値と点 P の座標を求めよ．

(3) 曲線 $y=e^{\sqrt{x}}$ と直線 $y=kx$ および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．【2024 佐賀大学】

解説　$f(x)=e^{\sqrt{x}}$ とおく．この $f(x)$ の定義域は $x\geqq 0$ である．

(1) $x>0$ において，

$$f'(x)=e^{\sqrt{x}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

であり，

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x}}\right)'\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}}}{4x}-\frac{e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

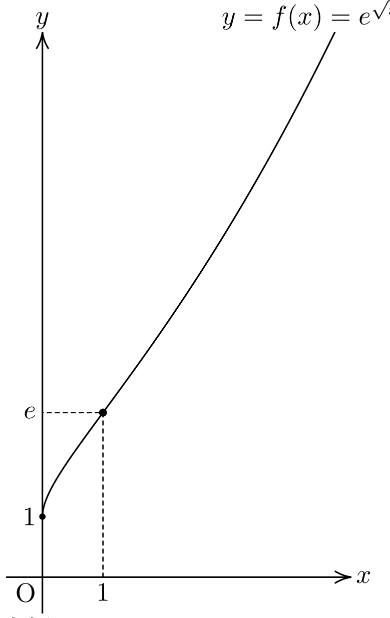
これより，$f(x)$ の増減と曲線 $y=f(x)$ の凹凸は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↗	e	↗

したがって，変曲点の座標は

$$(\mathbf{1},\ \boldsymbol{e})$$

であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ により，曲線 $y = f(x)$ の概形は次図のようになる．



(2) 点 P の x 座標を p とおく．$p > 0$ である．条件により，

$$\begin{cases} f(p) = kp, \\ f'(p) = k \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} e^{\sqrt{p}} = kp, & \cdots ① \\ \dfrac{e^{\sqrt{p}}}{2\sqrt{p}} = k & \cdots ② \end{cases}$$

$k > 0$ であり，①，② より，

$$\frac{kp}{2\sqrt{p}} = k$$

であるから，

$$\frac{p}{2\sqrt{p}} = 1.$$

$$\sqrt{p} = 2.$$

$$\therefore\ \ p = 4.$$

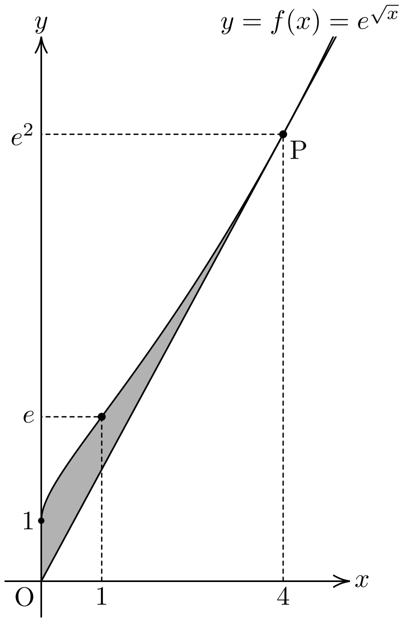
これより，点 P の座標は

$$\mathrm{P}\big(\mathbf{4},\ \boldsymbol{e^2}\big)$$

であり，

$$k = \boldsymbol{\frac{e^2}{4}}.$$

(3) 求める面積を S とすると，S は次図の灰色部分の面積である．



$$S = \int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot e^2.$$

ここで，第 1 項の積分について，$\sqrt{x} = t$ とおく置換積分を行うと，$x = t^2$ より $dx = 2tdt$ より，

$$\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 e^t 2tdt = \Big[2(t-1)e^t\Big]_0^2 = 2e^2 + 2.$$

$$\therefore\ \ S = (2e^2 + 2) - 2e^2 = \mathbf{2}.$$

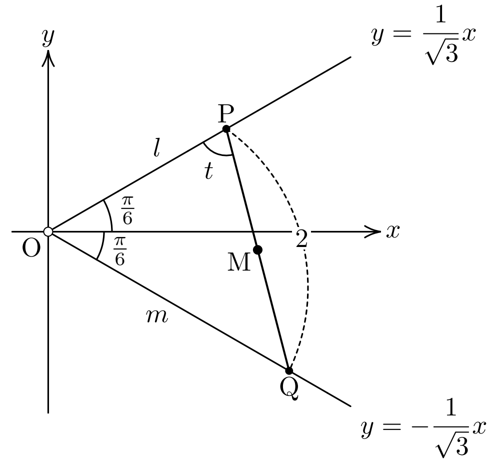
B **4**

原点を O とする座標平面において，直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ の $x > 0$ の部分を l，直線 $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ の $x > 0$ の部分を m とする．点 P は l 上を，点 Q は m 上を，$\mathrm{PQ} = 2$ を満たしながら動くとする．

(1) $\angle\mathrm{OPQ} = t$ とするとき，P，Q の座標を t を用いて表せ．

(2) 線分 PQ の中点 M の軌跡を求め，座標平面上に図示せよ．　【2024 信州大学】

解説



(1) $\mathrm{OP}=p$，$\mathrm{OQ}=q$ とおく．三角形 OPQ で正弦定理から，

$$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{q}{\sin t}=\frac{p}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-t\right)}.$$

$$\therefore\ \ p=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2}{3}\pi-t\right),\quad q=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin t.$$

これより，P の座標は

$$\mathrm{P}\left(p\cos\frac{\pi}{6},\ p\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

すなわち

$$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\sin t+\sqrt{3}\cos t,\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t+\cos t}\right).$$

Q の座標は

$$\mathrm{Q}\left(q\cos\frac{\pi}{6},\ -q\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

すなわち

$$\mathrm{Q}\left(\boldsymbol{2\sin t,\ \ -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t}\right).$$

(2) (1) より，線分 PQ の中点 M の座標は

$$\mathrm{M}\left(\frac{\sin t+\sqrt{3}\cos t+2\sin t}{2},\ \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t+\cos t-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t}{2}\right)$$

すなわち

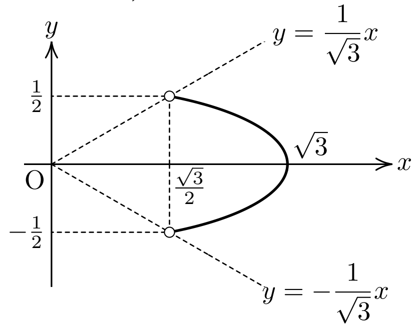
$$\mathrm{M}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-t\right),\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-t\right)\right).$$

t は $0<t<\frac{2}{3}\pi$ を変化するので，$\frac{\pi}{3}-t$ は $\frac{\pi}{3}$ から $-\frac{\pi}{3}$ を動く．

したがって，t が $0<t<\frac{2}{3}\pi$ を変化するとき，点 M は楕円 $\frac{x^2}{3}+3y^2=1$ 上を，点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ から $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ まで時計回りに動く．これより，M の軌跡は

$$\text{楕円 } \boldsymbol{\frac{x^2}{3}+3y^2=1} \text{ の } \boldsymbol{x>\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ の部分}$$

であり，図示すると，次図の太線部分となる．



B **5**

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=1-\frac{1}{2}e^{nx}+\cos\frac{x}{3}\quad(x\geqq 0)$$

で定める．

(1) 方程式 $f_n(x)=0$ は，ただ 1 つの実数解をもつことを示せ．

(2) (1) における実数解を a_n とおくとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ．　【2024 大阪大学】

解説

(1)

$$\begin{aligned}f_n{}'(x)&=-\frac{n}{2}e^{nx}-\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}\\&\leqq-\frac{n}{2}\cdot e^0-\frac{1}{3}\cdot(-1)=\frac{2-3n}{6}<0\end{aligned}$$

より，$x\geqq 0$ において $f_n(x)$ は単調減少．さらに，$f_n(0)=\frac{3}{2}>0$ であり，

$$f_n(x)\leqq 2-\frac{1}{2}e^{nx}\ \text{および}\ \lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{2}e^{nx}\right)=-\infty$$

より，$\lim_{x\to\infty}f_n(x)=-\infty$ ゆえ，$f_n(x)=0\ \ (x\geqq 0)$ はただ 1 つの実数解をもつ．■

(2) a_n の定義により，

$$1-\frac{1}{2}e^{na_n}+\cos\frac{a_n}{3}=0,\quad a_n\geqq 0.$$

$$\therefore\ \ e^{na_n}=2\left(1+\cos\frac{a_n}{3}\right).\qquad\cdots(*)$$

$(*)$ より，$e^{na_n}\leqq 4$ が成り立つので，

$$0\leqq na_n\leqq\log 4.$$

$$\therefore\ \ 0\leqq a_n\leqq\frac{\log 4}{n}.$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\log 4}{n}=0$ により，はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\boldsymbol{0}.$$

(3) $(*)$ より，

$$na_n=\log\left\{2\left(1+\cos\frac{a_n}{3}\right)\right\}$$

であり，(2) の結果から，

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\log\{2\times(1+\cos 0)\}=\boldsymbol{\log 4}.$$