

- [1] 点 O を原点とする座標平面上で、2 点 $(2, 0)$, $(-2, 0)$ を焦点とし、焦点からの距離の和が $\frac{20}{3}$ である楕円を考える．この楕円上の点 $P(p, q)$ における接線を ℓ とする．ただし、 p, q は正の実数とする． ℓ と x 軸との交点を A とし、 ℓ と y 軸との交点を B とする． $\triangle OAB$ の面積を最小にする点 P の座標を求め、そのときの $\triangle OAB$ の面積を求めよ．

[2] 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4 x - \tan^2 x - 2}{\tan^2 x - 4} dx$ を求めよ．

[3] $f(x) = \frac{a}{x+1} + \log x$ が $0 < x < 2$ において極小値をもつような実数 a の値の範囲を求めよ．

[4] 極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_1^t \log \frac{x+1}{x} dx - \log t \right)$ を求めよ．

[5] i を虚数単位とする．複素数 z が、絶対値が 2 である複素数全体を動くとき、 $\left| z - \frac{i}{z} \right|$ の最大値と最小値を求めよ．

[6] 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \cdots + \sqrt{n^2 - n^2}}{1 + 2 + \cdots + n}$ を求めよ．

[7] 曲線 $y = \sin x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ と y 軸および直線 $y = 1$ によって囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．