

A 1

点 O を原点とする座標平面上で、2 点 $(2, 0)$, $(-2, 0)$ を焦点とし、焦点からの距離の和が $\frac{20}{3}$ である楕円を考える。この楕円上の点 $P(p, q)$ における接線を ℓ とする。ただし、 p, q は正の実数とする。 ℓ と x 軸との交点を A とし、 ℓ と y 軸との交点を B とする。 $\triangle OAB$ の面積を最小にする点 P の座標を求め、そのときの $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

【2025 東京理科大学】

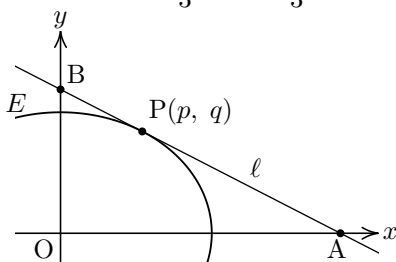
解説 この楕円を E とする。楕円 E の焦点が x 軸上にあり、楕円の中心が原点であることから、

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

とおける。条件から、

$$\sqrt{a^2 - b^2} = 2, \quad 2a = \frac{20}{3}.$$

$$\therefore a = \frac{10}{3}, \quad b = \frac{8}{3}.$$



点 P の座標を $(a \cos \theta, b \sin \theta)$ とおくと、点 P が楕円 E の第 1 象限の部分動くことから、 θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を変化する。 ℓ の式は

$$\ell: \frac{a \cos \theta}{a^2} x + \frac{b \sin \theta}{b^2} y = 1$$

より、

$$A\left(\frac{a}{\cos \theta}, 0\right), \quad B\left(0, \frac{b}{\sin \theta}\right).$$

これより、

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\cos \theta} \cdot \frac{b}{\sin \theta} = \frac{ab}{\sin 2\theta}$$

は $2\theta = \frac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のときに最小となる。よって、求める点 P の座標は

$$P\left(\frac{5}{3}\sqrt{2}, \frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$$

であり、 $\triangle OAB$ の最小値は $\frac{80}{9}$ 。

参考 p, q のまま解くと次のようになる。

$$\ell: \frac{p}{a^2} x + \frac{q}{b^2} y = 1$$

より、

$$A\left(\frac{a^2}{p}, 0\right), \quad B\left(0, \frac{b^2}{q}\right).$$

これより、

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{p} \cdot \frac{b^2}{q} = \frac{a^2 b^2}{2pq}.$$

これより、実数 p, q が

$$p > 0, \quad q > 0, \quad \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1$$

を満たしながら変化するとき、 pq の最大を求めることに帰着される。相加平均と相乗平均の大小関係から、

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \geq 2\sqrt{\frac{p^2}{a^2} \cdot \frac{q^2}{b^2}}$$

すなわち

$$1 \geq 2 \cdot \frac{p}{a} \cdot \frac{q}{b}.$$

$$pq \leq \frac{ab}{2}.$$

ここで、等号は

$$\frac{p^2}{a^2} = \frac{q^2}{b^2} \quad \left(= \frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad p = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad q = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

のときに成り立ち、このとき、 pq は最大値 $\frac{ab}{2}$ をとる。

A 2

$$\text{定積分 } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4 x - \tan^2 x - 2}{\tan^2 x - 4} dx \text{ を求めよ。}$$

【2025 九州大学】

解説 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4 x - \tan^2 x - 2}{\tan^2 x - 4} dx$ に対して、 $\tan x = t$ とおくと、

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \tan^2 x) dx$$

より、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\tan^2 x - 2)(\tan^2 x + 1)}{\tan^2 x - 4} dx \\ &= \int_0^1 \frac{t^2 - 2}{t^2 - 4} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^2 - 4 + 2}{t^2 - 4} dt = \int_0^1 \left(1 + \frac{2}{t^2 - 4}\right) dt \\ &= 1 + \int_0^1 \frac{2}{(t+2)(t-2)} dt \\ &= 1 + \int_0^1 \left(\frac{-\frac{1}{2}}{t+2} + \frac{\frac{1}{2}}{t-2}\right) dt \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left[\log |t-2| - \log |t+2| \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \log 3. \end{aligned}$$

A 3

$f(x) = \frac{a}{x+1} + \log x$ が $0 < x < 2$ において極小値をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。

【2025 学習院大学】

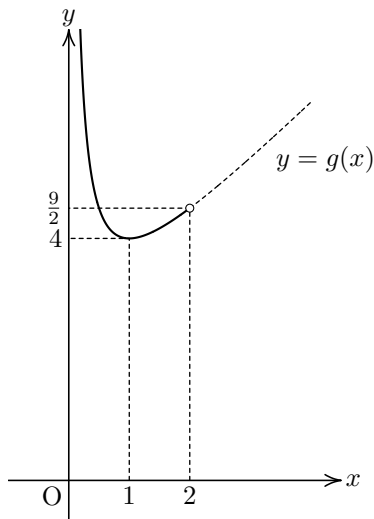
解説

$$\begin{aligned} f'(x) &= a \cdot \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{(x+1)^2 - ax}{x(x+1)^2} = \frac{\left(x+2+\frac{1}{x}\right) - a}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

ここで、 $g(x) = x+2+\frac{1}{x}$ とおくと、

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

$x > 0$ における $y = g(x)$ のグラフは次のようになる。



これより、

$$\begin{cases} a \geq \frac{9}{2} \implies f(x) \text{ は } 0 < x < 2 \text{ で極小値をもたない,} \\ 4 < a < \frac{9}{2} \implies f(x) \text{ は } 0 < x < 2 \text{ で極小値をもつ,} \\ a \leq 4 \implies f(x) \text{ は } 0 < x < 2 \text{ で極小値をもたない.} \end{cases}$$

よって、求める a の値の範囲は

$$4 < a < \frac{9}{2}.$$

A 4

極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_1^t \log \frac{x+1}{x} dx - \log t \right)$ を求めよ。

【2025 横浜国立大学】

解説

$$\begin{aligned} \int_1^t \log \frac{x+1}{x} dx &= \int_1^t (\log(x+1) - \log x) dx \\ &= \left[x \log x - x \right]_2^{t+1} - \left[x \log x - x \right]_1^t \\ &= (t+1) \log(t+1) - t \log t - 2 \log 2 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} &\int_1^t \log \frac{x+1}{x} dx - \log t \\ &= (t+1) \log(t+1) - (t+1) \log t - 2 \log 2 \\ &= (t+1) \log \frac{t+1}{t} - 2 \log 2 \\ &= \log \left\{ \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right\} + \log \left(1 + \frac{1}{t}\right) - 2 \log 2 \\ &\rightarrow \log e + \log 1 - 2 \log 2 = \mathbf{1 - 2 \log 2} \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

A 5

i を虚数単位とする。複素数 z が、絶対値が 2 である複素数全体を動くとき、 $\left| z - \frac{i}{z} \right|$ の最大値と最小値を求めよ。

【2025 京都大学】

解説

$z = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおけ、 θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ をくまなく動く。このとき、

$$\begin{aligned} z - \frac{i}{z} &= 2(\cos \theta + i \sin \theta) - \frac{i}{2}(\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \left(2 \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta\right) + \left(2 \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta\right) i \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \left| z - \frac{i}{z} \right|^2 &= \left(2 \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta\right)^2 + \left(2 \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta\right)^2 \\ &= \frac{17}{4} \cos^2 \theta + \frac{17}{4} \sin^2 \theta - 4 \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{17}{4} - 2 \sin 2\theta. \end{aligned}$$

これより、 $\left| z - \frac{i}{z} \right|$ の最大値は、

$$\sqrt{\frac{17}{4} + 2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

であり、最小値は

$$\sqrt{\frac{17}{4} - 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

である。

A 6

極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \cdots + \sqrt{n^2 - n^2}}{1 + 2 + \cdots + n}$
 を求めよ. 【2025 島根大学】

解説

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \cdots + \sqrt{n^2 - n^2}}{1 + 2 + \cdots + n} \\
 &= \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2}}{\frac{1}{2}n(n+1)} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}}{1 + \frac{1}{n}} \\
 &\rightarrow \frac{2 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx}{1 + 0} \quad (n \rightarrow \infty).
 \end{aligned}$$

ここで, $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ は単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の $x \geq 0$, $y \geq 0$ である四分円の面積を表すので,

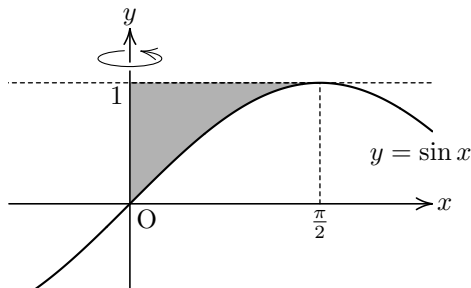
$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1^2} + \cdots + \sqrt{n^2 - n^2}}{1 + \cdots + n} = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

A 7

曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と y 軸および直線 $y = 1$ によって囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

【2025 横浜市立大学】

 解説 求める体積を V とする.


$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 \pi x^2 dy \quad (y = \sin x) \\
 &= \int_0^{\pi/2} \pi x^2 \cos x dx \\
 &= \pi \left[x^2 \cdot \sin x - 2x \cdot (-\cos x) + 2 \cdot (-\sin x) \right]_0^{\pi/2} \\
 &= \pi \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right).
 \end{aligned}$$

参考 shell integral (本編 p.146) で計算すると, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
 V &= \underbrace{\pi \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \cdot 1}_{\text{円柱}} - \int_0^{\pi/2} 2\pi x \sin x dx \\
 &= \pi \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \int_0^{\pi/2} x \sin x dx \right).
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\int_0^{\pi/2} x \sin x dx = \left[x \cdot (-\cos x) - 1 \cdot (-\sin x) \right]_0^{\pi/2} = 1$$

より,

$$V = \pi \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right).$$