

- 1** 座標平面において、曲線 $y = \frac{2}{x}$ ($x > 0$) を C とする. C の接線で点 $P(4, 0)$ を通るものを直線 l とし、曲線 C と直線 l の接点を Q とする.

- (1) 直線 l の方程式および点 Q の座標を求めよ.
- (2) 曲線 C , 直線 PQ および直線 $x = 4$ で囲まれた部分の面積を求めよ.
- (3) (2) で定めた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

- 2** 媒介変数 θ を用いて

$$x = \sin \theta, \quad y = \cos \theta + |\sin \theta| \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で表される曲線を C とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 曲線 C の概形をかけ.
- (2) 曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ.

- 3** xy 平面上において、点 $(1, 0)$ からの距離と直線 $x = 4$ からの距離の比が $1:2$ である点の軌跡を C とする.

- (1) 曲線 C の方程式を求めよ.
- (2) m, n を定数とし、 $n > 0$ であるとする. 直線 $l: y = mx + n$ と原点 O の距離を d とおく. 直線 l が曲線 C に接するとき、 n と d を m を用いて表せ.
- (3) 長方形 $PQRS$ の各辺が曲線 C に接しているとする. この長方形 $PQRS$ を原点 O を中心に 1 回転させるとき、長方形 $PQRS$ の各辺および内部が通過する部分の面積を求めよ.

- 4** i を虚数単位とし、 z を複素数とする. また、 $w = 1 + iz$ とする. 複素数平面において、4 点 $O(0)$, $A(z)$, $B(w)$, $C(1)$ を考える. 以下の各問に答えよ.

- (1) $OA = BC$ であることを示せ. また、 $z \neq 0$ のとき、直線 OA と直線 BC は垂直に交わることを示せ.
- (2) $OA = AB$ を満たす点 z の全体は、どのような図形を表すか.
- (3) 点 z が (2) の図形上を動くとき、 $|z + w|$ の最大値と最小値を求めよ. ただし、最大値と最小値を与える z の値を求める必要はない.

- 5** 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3k-2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{3k-2} + \cdots$ の和を求める. 以下の問いに答えよ.

- (1) n を自然数とするとき、 $x \neq -1$ に対して、等式 $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{3k-3} = \frac{1}{x^3+1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{3n}}{x^3+1}$ を証明せよ.
- (2) 等式 $\frac{1}{x^3+1} = \frac{A(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{B}{x^2-x+1} + \frac{C}{x+1}$ が x についての恒等式となるように、定数 A, B, C の値を定めよ.
- (3) n を自然数とするとき、不等式 $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{3n}}{x^3+1} dx \leq \frac{1}{3n+1}$ を証明せよ.
- (4) $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta$ において置換積分することにより、定積分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1}$ の値を求めよ.
- (5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3k-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{3k-2}$ を求めよ.