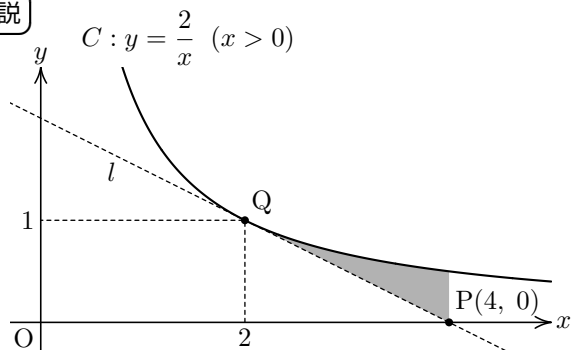


B 1

座標平面において、曲線 $y = \frac{2}{x}$ ($x > 0$) を C とする。 C の接線で点 $P(4, 0)$ を通るものを直線 l とし、曲線 C と直線 l の接点を Q とする。

- (1) 直線 l の方程式および点 Q の座標を求めよ。
- (2) 曲線 C 、直線 PQ および直線 $x = 4$ で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (3) (2) で定めた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 【2025 鹿児島大学】

解説



- (1) $\left(\frac{2}{x}\right)' = -\frac{2}{x^2}$ より、 C の点 $\left(t, \frac{2}{t}\right)$ における接線は

$$y = -\frac{2}{t^2}(x - t) + \frac{2}{t}$$

であり、これが点 $P(4, 0)$ を通る条件は

$$0 = -\frac{2}{t^2}(4 - t) + \frac{2}{t}.$$

$$\therefore t = 2.$$

これより、 l の接線の方程式は

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

であり、点 Q の座標は

$$Q(2, 1).$$

- (2) 求める面積は

$$\begin{aligned} & \int_2^4 \left\{ \frac{2}{x} - \left(-\frac{1}{2}x + 2 \right) \right\} dx \\ &= \left[2 \log x + \frac{1}{4}x^2 - 2x \right]_2^4 \\ &= 2 \log 2 - 1. \end{aligned}$$

- (3) 求める体積は

$$\begin{aligned} & \int_2^4 \pi \left(\frac{2}{x} \right)^2 dx - \overbrace{\pi \cdot 1^2 \times 2 \times \frac{1}{3}}^{\text{円錐の体積}} \\ &= \pi \left[-\frac{4}{x} \right]_2^4 - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

B 2

媒介変数 θ を用いて

$$x = \sin \theta, \quad y = \cos \theta + |\sin \theta| \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で表される曲線を C とする。以下の問に答えよ。

- (1) 曲線 C の概形をかけ。
- (2) 曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ。

【2025 神戸大学】

解説

$x(\theta) = \sin \theta$, $y(\theta) = \cos \theta + |\sin \theta|$ とおくと、

$$\begin{cases} x(2\pi - \theta) = \sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta = -x(\theta), \\ y(2\pi - \theta) = \cos(2\pi - \theta) + |\sin(2\pi - \theta)| = \cos \theta + |\sin \theta| = y(\theta) \end{cases}$$

であるので、点 $(x(\theta), y(\theta))$ と点 $(x(2\pi - \theta), y(2\pi - \theta))$ は y 軸対称の位置にある。

- (1) $0 \leq \theta \leq \pi$ において、

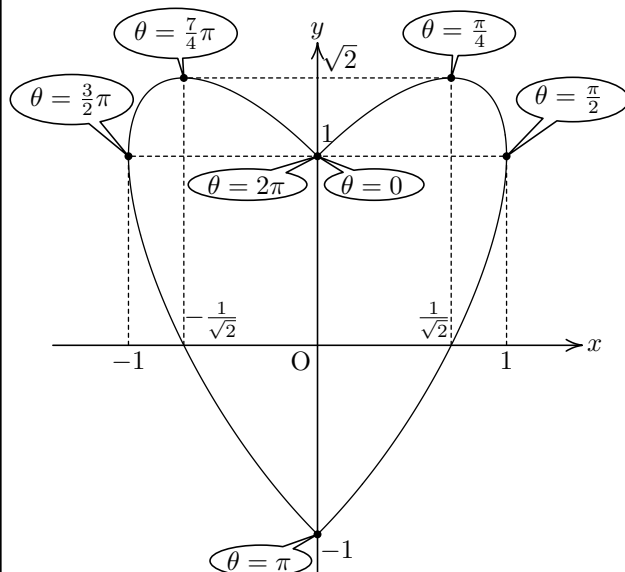
$$(x(\theta), y(\theta)) = (\sin \theta, \cos \theta + \sin \theta)$$

であり、

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \cos \theta - \sin \theta.$$

θ	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$\frac{dx}{d\theta}$		+	+	+	0	-	
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	-	-	-	
(x, y)	(0, 1)	↗	$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$	↘	(1, 1)	↙	(0, -1)

点 $(x(\theta), y(\theta))$ と点 $(x(2\pi - \theta), y(2\pi - \theta))$ は y 軸対称の位置にあることに注意すると、 C の概形は次図のようになる。



- (2) 求める面積を S とすると, C が y 軸対称な曲線であることに注意して,

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \int_0^1 y dx - 1 + \int_{-1}^1 x dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + \sin \theta) \cos \theta d\theta - 1 + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (\cos \theta - \sin \theta) d\theta.\end{aligned}$$

2 つ目の積分で, $\theta = \pi - t$ とおくと,

$$\begin{aligned}&\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (\cos \theta - \sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t (-\cos t - \sin t) (-1) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (\cos \theta + \sin \theta) d\theta\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin 2\theta) d\theta - 1 \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 + \left[\frac{-\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

$$\therefore S = \pi.$$

B 3

xy 平面上において, 点 $(1, 0)$ からの距離と直線 $x = 4$ からの距離の比が $1 : 2$ である点の軌跡を C とする.

- (1) 曲線 C の方程式を求めよ.
- (2) m, n を定数とし, $n > 0$ であるとする. 直線 $l : y = mx + n$ と原点 O の距離を d とおく. 直線 l が曲線 C に接するとき, n と d を m を用いて表せ.
- (3) 長方形 PQRS の各辺が曲線 C に接しているとする. この長方形 PQRS を原点 O を中心に 1 回転させるとき, 長方形 PQRS の各辺および内部が通過する部分の面積を求めよ. 【2025 北里大学】

解説

- (1) 点 $(X, Y) \in C$
 $\iff 2\sqrt{(X-1)^2 + Y^2} = |X-4|$
 $\iff 4\{(X-1)^2 + Y^2\} = (X-4)^2$
 $\iff 4X^2 - 8X + 4 + 4Y^2 = X^2 - 8X + 16$
 $\iff 3X^2 + 4Y^2 = 12.$
 $\therefore C : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$

- (2) 直線 $l : y = mx + n$ が曲線 $C : 3x^2 + 4y^2 = 12$ に接する条件は, x の 2 次方程式

$$3x^2 + 4\{mx + n\}^2 = 12$$

すなわち

$$(4m^2 + 3)x^2 + 8mnx + 4(n^2 - 3) = 0$$

が重解をもつことであり, この判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4} = (4mn)^2 - (4m^2 + 3) \cdot 4(n^2 - 3) = 0$$

より

$$n^2 = 4m^2 + 3.$$

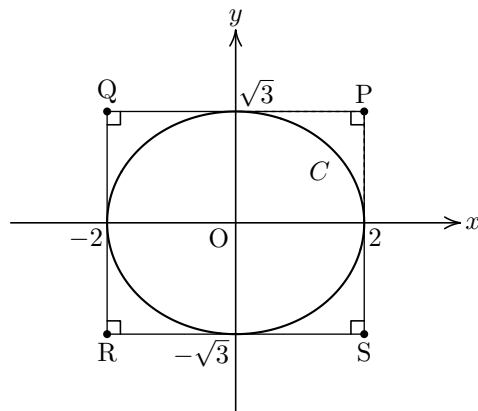
$n > 0$ より,

$$n = \sqrt{4m^2 + 3}.$$

また, これより, 直線 $l : mx - y + n = 0$ と原点 O の距離 d は

$$d = \frac{|n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{\sqrt{4m^2 + 3}}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

- (3) ● 長方形 PQRS の各辺が座標軸と平行である場合.



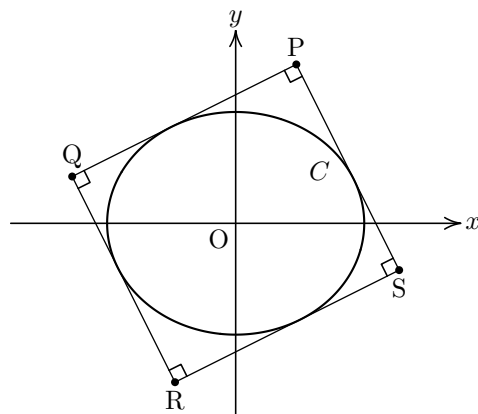
求める面積は, 半径

$$OP = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$$

の円の面積として,

$$\pi(\sqrt{7})^2 = 7\pi.$$

- 長方形 PQRS の各辺が座標軸と平行でない場合.



直線 PQ の式を (2) で $y = mx + n$ とすると、直線 RS の式は $y = mx - n$ であり、原点 O とこれら 2 直線との距離は等しく

$$d = \frac{\sqrt{4m^2 + 3}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

である。また、直線 PS の式は $y = -\frac{1}{m}x + n'$ とかけ、すると、直線 QR の式は $y = -\frac{1}{m}x - n'$ となり、原点 O とこれら 2 直線との距離は等しく

$$d' = \frac{\sqrt{4\left(-\frac{1}{m}\right)^2 + 3}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{m}\right)^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3m^2 + 4}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

である。これより、長方形の 4 頂点 P, Q, R, S は原点との距離がいずれも

$$\sqrt{d^2 + d'^2} = \sqrt{\frac{4m^2 + 3}{m^2 + 1} + \frac{3m^2 + 4}{m^2 + 1}} = \sqrt{\frac{7(m^2 + 1)}{m^2 + 1}}$$

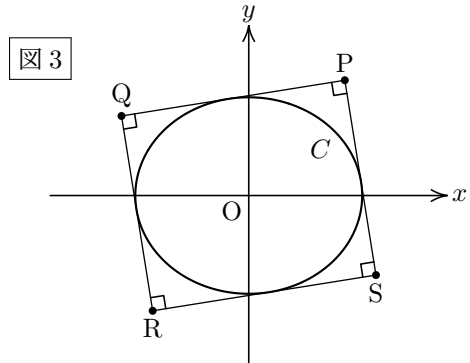
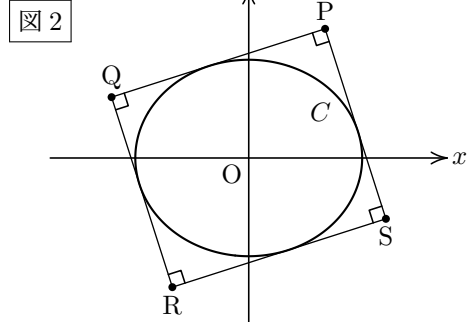
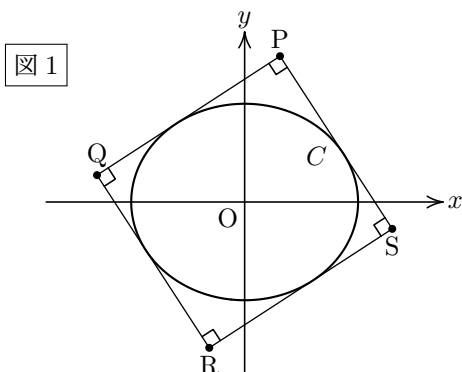
となり、 m に依らず一定値 $\sqrt{7}$ をとる。これより、求める面積は

$$\pi(\sqrt{7})^2 = 7\pi.$$

結局、長方形 PQRS の各辺が座標軸と平行かどうかにかかわらず、求める面積は

$$\pi(\sqrt{7})^2 = 7\pi.$$

注意 (3) の問題文を読んで「おっ?!」とか「えっ?!」とかいう心の声を漏らした人はどれほどいるであろうか？ (3) の問題文は一見、奇妙に感じる。というのも、各辺が曲線 C に接している長方形 PQRS というのは、1 つではない。次に 3 つほど例を挙げるが、各辺の傾き具合は連続的に変化できそうなので、条件を満たす長方形は無数にあるからである。



すると、求める面積は図 1 の場合には $\heartsuit$ 、図 2 の場合には $\spadesuit$ 、図 3 の場合には $\clubsuit$ 、... のように答えるのであろうか？ 長方形の傾き具体を表すパラメーターを用いて面積を表現することが要求されているのであろうか？ もしそうなら、表現する文字などが導入されていないため、答えにくい (あるいは答え方は複数あり得る) 問題ということになる。そこで、「実は長方形の傾斜に依らず、実は面積は等しくなるのでは?!」ということが予想 (期待) される。ここでの考察から、問題文がそのような現象を示唆しているように読み取れるのである。

参考 本問は 2 次曲線についての背景知識があればときやすい。(1) では離心率が背景にあるが、これについては本編の p.156 で詳細に解説している。ここでは (3) の背景について解説しておこう。長方形が楕円に外接するように配置される状況を考えているが、少し見方を変えて「点 P から楕円 C に直交する 2 接線が引ける」と捉えてみよう。どんな (C 外の) 点から C に接線を引けば、その 2 接線はなす角を直角にするのであろうか？ そのような C 外の点 P の軌跡を考えてみる。点 (X, Y) から C へ引いた 2 接線が直交するための条件を調べてみよう。

● $X^2 = 4$ のとき、

$X = 2$ なら、 $Y = \pm\sqrt{3}$ のみ条件を満たす。

$X = -2$ なら、 $Y = \pm\sqrt{3}$ のみ条件を満たす。

● $X^2 \neq 4$ のとき、 $n^2 = 4m^2 + 3$ と $Y = mX + n$ から n を消去して得られる m の 2 次方程式

$$(X^2 - 4)m^2 - 2XYm + (Y^2 - 3) = 0$$

が $m = \star$, $-\frac{1}{\star}$ の形の (積が -1 となる) 2 解をもつような条件として, (解と係数の関係から)

$$-\frac{Y^2 - 3}{X^2 - 4} = -1$$

すなわち

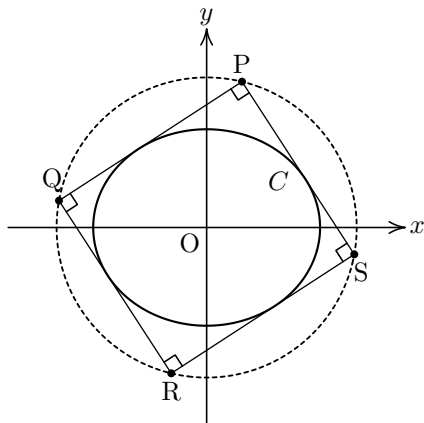
$$X^2 + Y^2 = 7.$$

以上より, いま調べている軌跡は

$$\text{円 } x^2 + y^2 = (\sqrt{7})^2$$

となる.

つまり, 図 1, 図 2, 図 3 などの長方形 PQRS はすべて円 $x^2 + y^2 = (\sqrt{7})^2$ に内接しているのである.



この円 $x^2 + y^2 = (\sqrt{7})^2$ は楕円 C の準円 (director circle, orthoptic circle, Fermat - Apollonius circle) と呼ばれている. (3) で, 長方形の傾斜に依らず, 求める面積が一定であったのには, この準円が背景にある.

B 4

i を虚数単位とし, z を複素数とする. また, $w = 1 + iz$ とする. 複素数平面において, 4 点 $O(0)$, $A(z)$, $B(w)$, $C(1)$ を考える. 以下の各問に答えよ.

- (1) $OA = BC$ であることを示せ. また, $z \neq 0$ のとき, 直線 OA と直線 BC は垂直に交わることを示せ.
- (2) $OA = AB$ を満たす点 z の全体は, どのような図形を表すか.
- (3) 点 z が (2) の図形上を動くとき, $|z + w|$ の最大値と最小値を求めよ. ただし, 最大値と最小値を与える z の値を求める必要はない.

【2025 茨城大学】

解説

- (1) $w = 1 + iz$ より,

$$BC = |1 - w| = |iz| = |i||z| = |z| = OA$$

の成立がわかる. ■

さらに,

$$w - 1 = iz = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) z$$

より, $\overrightarrow{CB}$ は $\overrightarrow{OA}$ を $\frac{\pi}{2}$ 回転したものである. $z \neq 0$ のとき, $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$ であり, 直線 OA と直線 BC は垂直に交わることがわかる. ■

- (2) $OA = AB$ を満たす点 z を

$$z = x + yi \quad (x, y \text{ は実数})$$

とおいて調べよう.

$$OA^2 = |z|^2 = x^2 + y^2$$

であり,

$$\begin{aligned} AB^2 &= |w - z|^2 \\ &= |1 + iz - z|^2 \\ &= |(1 - x - y) + (x - y)i|^2 \\ &= (1 - x - y)^2 + (x - y)^2 \end{aligned}$$

であるので, 条件は

$$x^2 + y^2 = (1 - x - y)^2 + (x - y)^2.$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

ゆえに, 求める点 z の全体は,

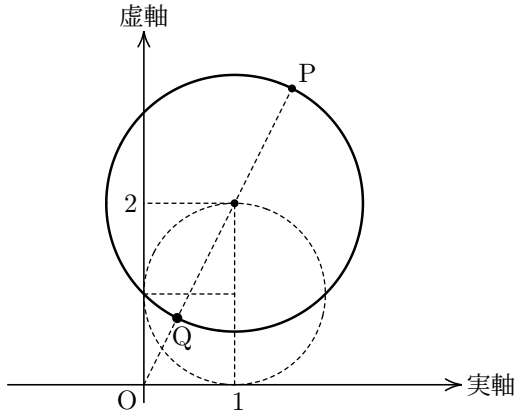
点 $1 + i$ を中心とする半径 1 の円

である.

- (3) $w = 1 + iz$ より,

$$\begin{aligned} z + w &= z + (1 + iz) = (1 + i)z + 1 \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) z + 1 \end{aligned}$$

は点 z を原点中心に $\sqrt{2}$ 倍の拡大および $\frac{\pi}{4}$ 回転を施し, さらに実軸方向に 1 だけ平行移動した点を表す. したがって, 点 z が (2) の円を動くとき, 点 $z + w$ の軌跡は, 中心が $(1 + i)(1 + i) + 1 = 1 + 2i$, 半径が $1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$ の円となる.



$|z + w|$ は原点とこの円上の点 $z + w$ との距離を表すので、 $|z + w|$ が最大となるのは、点 $z + w$ が原点から最も離れた図の点 P の位置にある場合であり、最小となるのは、点 $z + w$ が原点から最も近い図の点 Q の位置にある場合である。この円の中心 $1 + 2i$ と原点との距離が $|1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ であることと、円の半径が $\sqrt{2}$ であることから、

$$|z + w| \text{ の最大値は } \sqrt{5} + \sqrt{2},$$

$$|z + w| \text{ の最小値は } \sqrt{5} - \sqrt{2}.$$

B 5

無限級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3k-2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{3k-2} + \cdots$$

の和を求める。以下の問いに答えよ。

- (1) n を自然数とすると、 $x \neq -1$ に対して、等式

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{3k-3} = \frac{1}{x^3+1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{3n}}{x^3+1}$$

を証明せよ。

- (2) 等式 $\frac{1}{x^3+1} = \frac{A(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{B}{x^2-x+1} + \frac{C}{x+1}$ が x についての恒等式となるように、定数 A, B, C の値を定めよ。

- (3) n を自然数とすると、不等式

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{3n}}{x^3+1} dx \leq \frac{1}{3n+1}$$

を証明せよ。

- (4) $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta$ において置換積分することにより、定積分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1}$ の値を求めよ。

- (5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3k-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{3k-2}$ を求めよ。

【2025 岐阜薬科大学】

解説

(1)

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{3k-3} = \sum_{k=1}^n (-x^3)^{k-1}$$

は公比 $-x^3 (\neq 1)$ の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{3k-3} &= \frac{1 \cdot \{1 - (-x^3)^n\}}{1 - (-x^3)} \\ &= \frac{1 - (-x^3)^n}{1 + x^3} \\ &= \frac{1}{x^3+1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{3n}}{x^3+1} \end{aligned}$$

が成り立つ。 ■

(2)

$$\begin{aligned} &\frac{A(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{B}{x^2-x+1} + \frac{C}{x+1} \\ &= \frac{\{A(2x-1) + B\}(x+1) + C(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ &= \frac{(2A+C)x^2 + (A+B-C)x + (-A+B+C)}{x^3+1} \end{aligned}$$

より、条件は

$$2A + C = 0, \quad A + B - C = 0, \quad -A + B + C = 1.$$

$$\therefore A = -\frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{3}.$$

- (3) $0 \leq x \leq 1$ において、

$$0 \leq \frac{x^{3n}}{x^3+1} \leq x^{3n}$$

が成り立ち、これを $[0, 1]$ に渡って積分することで、

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{3n}}{x^3+1} dx \leq \int_0^1 x^{3n} dx = \frac{1}{3n+1}$$

が得られる。 ■

- (4) $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1}$ とおく。

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

より、 $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta$ とおく置換積分を行うと、

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

より、

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{3}{4}(\tan^2 \theta + 1)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$(5) \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{3k-2} = S_n \text{ とおく.}$$

(1) の式を $[0, 1]$ に渡って積分することで,

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^{3k-3} dx = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{x^3+1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{3n}}{x^3+1} \right\} dx$$

であり, この左辺が S_n であるから,

$$S_n = \int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{3n}}{x^3+1} dx.$$

ここで, (3) と $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n+1} = 0$ からはさみうちの原理により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{3n}}{x^3+1} dx = 0.$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx.$$

ここで, (2) の A, B, C と (4) の I を用いて,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{A(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{B}{x^2-x+1} + \frac{C}{x+1} \right) dx \\ &= \left[A \log(x^2-x+1) + C \log(x+1) \right]_0^1 + BI \\ &= C \log 2 + BI = \frac{\log 2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{3} \left(\log 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

であるから,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3k-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3} \left(\log 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right).$$

参考 Carl Siegel の『超越数』によると,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \left(\log 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$$

が無理数かどうかはわかっていないようである.

Coffee Break

筆者は, 大学や予備校で数学を教えているが, 講義の雑談として, 関連する数学者のエピソードなどをする. オイラーは「オイラーの多面体定理」で知られているようだが, ガウスやガロアなどは知らない人が多いようである. コーシーは「コーシー・シュワルツの不等式」のお陰で高校生も知っている人が一部にいる. ハイレベルのクラスでは, ニュートンの定理を岡潔の極線にまつわるエピソード (『月影』(岡潔著) の p.29 参照) と交えて話すこともあるが, 岡潔を知っている学生も (当然) ほぼ皆無である. 数学を学ぶ動機として数学史や数学者から入っていくのも良い方法であろう. いくつかオススメしておきたい本があるので, ここで紹介しておこう.

- 『人物で語る数学入門』(高瀬正仁, 岩波新書)
- 『天才数学者はこう解いた、こう生きた 方程式四千年の歴史』(木村俊一, 講談社学術文庫)
- 『大数学者』(小堀憲, ちくま学芸文庫)
- 『ザ・シークレット・ナンバーズ』(北川ケイト, ティモシー・レヴェル, KADOKAWA)

あまりにも有名なものはここでは取り上げていないが, サイモン・シン, マーカス・デュ・ソートイ, 志賀浩二などは是非とも読んでもらいたい.