

- 1 2つの関数  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ,  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$  について、次の問いに答えよ.
- (1) 関数  $f(x)$  および  $g(x)$  の増減を調べ、 $y = f(x)$  および  $y = g(x)$  のグラフをかけ.
  - (2) 2つの曲線  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  で囲まれた図形の面積を求めよ.
- 2 初項 1, 公差 7 の等差数列  $\{a_n\}$  について、初項から第 300 項のうち、9 と 11 両方で割り切れる  $a_n$  をすべて求めよ.
- 3 4点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(2, 1, 0)$ ,  $B(\sqrt{5}, 0, \sqrt{11})$ ,  $C(0, 0, 12\sqrt{5})$  がある. 点  $C$  から平面  $OAB$  に垂線を下ろし、交点を  $H$  とする.  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  とおくと、次の問いに答えよ.
- (1)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角を求め、三角形  $OAB$  の面積を求めよ.
  - (2)  $\vec{OH}$  を  $s\vec{a} + t\vec{b}$  と表すとき、実数  $s, t$  の値を求めよ. さらに、点  $H$  の座標を求めよ.
  - (3) 線分  $CH$  の長さを求め、四面体  $OABC$  の体積を求めよ.
- 4  $x$  についての多項式  $P(x) = x^2 + ax + b$  がある. ただし、 $a \neq 0, b \neq 0$  とする.  $P(x^2)$  を  $a, b, x$  の式で表し、 $P(x^2)$  を  $P(x)$  で割ったときの商  $Q(x)$  と余り  $R(x)$  を求めよ. また、 $P(x^2)$  が  $P(x)$  で割り切れるとき、定数  $a, b$  の値を求めよ.
- 5 1 個のさいころを 3 回投げる. 出た目の最小値を  $M$  とする.
- (1)  $M$  が 3 以上になる確率を求めよ.
  - (2)  $M$  が 3 になる確率を求めよ.
  - (3) 最初に出た目を  $X$  とする.  $M$  が 3 であったときに、 $X$  が 6 である条件付き確率を求めよ.

- 6 座標平面上の円  $x^2 + y^2 = 1$  を  $C_1$  とする.
- (1) 点 (3, 4) を中心とする円  $C_2$  と,  $C_1$  が外接するとき,  $C_2$  の方程式を求めよ.
  - (2)  $a$  を定数とし, 円  $(x - a)^2 + (y - a)^2 = 9$  を  $C_3$  とする.  $C_3$  が  $C_1$  と共有点をもたないとき,  $a$  のとりうる値の範囲を求めよ.
  - (3)  $r$  を正の定数とし, 円  $(x - 1)^2 + y^2 = r^2$  を  $C_4$  とする.  $C_1$  と  $C_4$  が2つの交点 A, B をもち, 線分 AB の長さが  $\sqrt{3}$  となるとき,  $r$  の値を求めよ.

- 7  $12^{39}$  について, 次の問いに答えよ. ただし,  $\log_{10} 2 = 0.3010$ ,  $\log_{10} 3 = 0.4771$  とする.
- (1) 桁数を求めよ.
  - (2) 最高位の数字を求めよ.
  - (3) 最高位の次の位の数字を求めよ.

- 8 関数  $f(x) = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) を考える.
- (1)  $t = \sin x - \cos x$  とおく.  $0 \leq x \leq 2\pi$  のとき,  $t$  のとり得る値の範囲を求めよ.
  - (2)  $f(x)$  を  $t$  を用いた式で表せ.
  - (3)  $f(x)$  の最大値と最小値を求めよ. また, そのときの  $x$  の値を求めよ.

- 9 四角形 ABCD は,
- $$AB = 7, \quad BC = 3, \quad CD = 5, \quad DA = 7, \quad \angle BAD = 60^\circ$$

を満たしている. AC と BD の交点を E とし, E を通り AB と平行な直線と直線 DC の交点を F とする. また,  $\triangle ABC$  の外接円に F から 2 本の接線を引き, それらの接点をそれぞれ G, H とする.

- (1) D は  $\triangle ABC$  の外接円上にあることを示せ.
- (2)  $FE = FG = FH$  を示せ.