1

2 つの関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ および $g(x)$ の増減を調べ，$y = f(x)$ および $y = g(x)$ のグラフをかけ．

(2) 2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ．　【2026 名古屋市立大学】

解説

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ より，

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3).$$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ より，

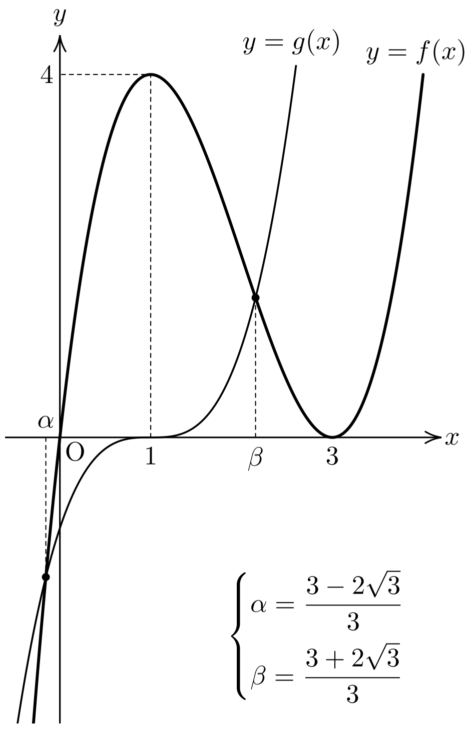
$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2.$$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$$g(x) - f(x) = 3x^2 - 6x - 1$$

であり，

$$g(x) - f(x) = 0 \iff x = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}.$$



$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{3 - 2\sqrt{3}}{3} \\ \beta = \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

(2) 求める面積を S とすると，S は放物線

$$y = g(x) - f(x) = 3x^2 - 6x - 1 = 3(x-\alpha)(x-\beta)$$

と x 軸とで囲まれる領域の面積と等しく，

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta -3(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= (-3)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{32}{9}\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

1/6 公式

注意　$g(x) = (x-1)^3$ である．

参考　1/6 公式については，本編の p.32 を参照せよ．

2

初項 1，公差 7 の等差数列 $\{a_n\}$ について，初項から第 300 項のうち，9 と 11 両方で割り切れる a_n をすべて求めよ．　【2026 鳥取大学】

解説　等差数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は

$$a_n = 1 + 7(n-1) = 7n - 6.$$

300 以下の自然数 n で $7n - 6$ が 9 でも 11 でも割り切れる，すなわち，99 で割り切れるものを考えよう．

m を整数として，不定方程式

$$7n - 6 = 99m \qquad \cdots(*)$$

を解く．$(n,\ m) = (15,\ 1)$ は $(*)$ を満たすことに着目すると，

$$(*) \iff 7(n-15) = 99(m-1).$$

これより，$(*)$ の整数解は，k を整数として，

$$\begin{cases} n - 15 = 99k, \\ m - 1 = 7k \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} n = 99k + 15, \\ m = 7k + 1 \end{cases}$$

と表せる．このうち n が 300 以下の自然数となるのは，k が

$$1 \leqq 99k + 15 \leqq 300$$

を満たす整数のとき，すなわち，

$$k = 0,\ 1,\ 2$$

のときであり，求める a_n は，

$$a_{15} = 7 \cdot 15 - 6 = \mathbf{99},$$

$$a_{114} = 7 \cdot 114 - 6 = \mathbf{792},$$

$$a_{213} = 7 \cdot 213 - 6 = \mathbf{1485}.$$

参考　1 次不定方程式については，本編の p.32，p.39，p.99 を参照せよ．

3

4 点 O(0, 0, 0)，A(2, 1, 0)，B($\sqrt{5}$, 0, $\sqrt{11}$)，C(0, 0, $12\sqrt{5}$) がある．点 C から平面 OAB に垂線を下ろし，交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくとき，次の問に答えよ．

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求め，三角形 OAB の面積を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ と表すとき，実数 s，t の値を求めよ．さらに，点 H の座標を求めよ．

(3) 線分 CH の長さを求め，四面体 OABC の体積を求めよ．【2026 佐賀大学】

解説　$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\0\\\sqrt{11}\end{pmatrix}$．

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくと，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta.$$

ここで，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot\sqrt{5}+1\cdot0+0\cdot\sqrt{11}=2\sqrt{5},$$

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2^2+1^2+0^2}=\sqrt{5},$$

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{(\sqrt{5})^2+0^2+(\sqrt{11})^2}=4$$

であるから，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot4}=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\ \ \theta=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}.$$

これより，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot4\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\sqrt{15}}.$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\vec{a}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\vec{b}$ により，

$$\begin{cases}0=\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=s\left|\vec{a}\right|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}\\\qquad\qquad=5s+2\sqrt{5}t,\\0=\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b}=s\vec{a}\cdot\vec{b}+t\left|\vec{b}\right|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}\\\qquad\qquad=2\sqrt{5}s+16t-12\sqrt{55}\end{cases}$$

$$\therefore\ \ s=-2\sqrt{11},\quad t=\sqrt{55}.$$

これより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-2\sqrt{11}\,\vec{a}+\sqrt{55}\,\vec{b}=(\sqrt{11},\ -2\sqrt{11},\ 11\sqrt{5})$$

であり，

$$\mathbf{H}\left(\boldsymbol{\sqrt{11},\ -2\sqrt{11},\ 11\sqrt{5}}\right).$$

(3) (2) より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\begin{pmatrix}\sqrt{11}\\-2\sqrt{11}\\-\sqrt{5}\end{pmatrix}$ であるから，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}\right|=\boldsymbol{2\sqrt{15}}.$$

したがって，四面体 OABC の体積は

$$\frac{\triangle\mathrm{OAB}\times\mathrm{CH}}{3}=\frac{\sqrt{15}\times2\sqrt{15}}{3}=\mathbf{10}.$$

4

x についての多項式 $P(x)=x^2+ax+b$ がある．ただし，$a\neq0$，$b\neq0$ とする．$P(x^2)$ を a，b，x の式で表し，$P(x^2)$ を $P(x)$ で割ったときの商 $Q(x)$ と余り $R(x)$ を求めよ．また，$P(x^2)$ が $P(x)$ で割り切れるとき，定数 a，b の値を求めよ．【2026 長崎大学】

解説　$P(x)=x^2+ax+b$ より，

$$P(x^2)=\boldsymbol{x^4+ax^2+b}$$

であり，これを $P(x)$ で割ると，筆算を実行して，

$$商\ Q(x)=\boldsymbol{x^2-ax+(a^2+a-b)},$$

$$余り\ R(x)=\boldsymbol{-a(a^2+a-2b)x-b(a^2+a-b-1)}.$$

また，$P(x^2)$ が $P(x)$ で割り切れる条件は，$R(x)$ が $0\cdot x+0$ となること，すなわち，

$$\begin{cases}-a(a^2+a-2b)=0,\\-b(a^2+a-b-1)=0.\end{cases}$$

$a\neq0$，$b\neq0$ より，

$$\begin{cases}a^2+a-2b=0, & \cdots①\\a^2+a-b-1=0. & \cdots②\end{cases}$$

① − ② により，

$$-b+1=0.$$

$$\therefore\ \ b=1.$$

これを ① に代入し，

$$a^2+a-2=0.$$

$$(a+2)(a-1)=0.$$

$$\therefore\ \ a=-2,\ 1.$$

したがって，求める $a,\ b$ は，

$$(a,\ b) = \boldsymbol{(-2,\ 1),\ \ (1,\ 1)}.$$

5

1 個のさいころを 3 回投げる．出た目の最小値を M とする．

(1) M が 3 以上になる確率を求めよ．

(2) M が 3 になる確率を求めよ．

(3) 最初に出た目を X とする．M が 3 であったときに，X が 6 である条件付き確率を求めよ．

【2026 琉球大学】

解説

(1) $M \geqq 3$ となるのは，3 回とも 3 以上の目が出る場合であるので，

$$P(M \geqq 3) = \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{8}{27}}.$$

(2) $M = 3$ となるのは，$M \geqq 3$ の場合から $M \geqq 4$ の場合を除外して捉えることができ，

$$\begin{aligned} P(M = 3) &= P(M \geqq 3) - P(M \geqq 4) \\ &= \left(\frac{4}{6}\right)^3 - \left(\frac{3}{6}\right)^3 \\ &= \frac{4^3 - 3^3}{6^3} = \boldsymbol{\frac{37}{216}}. \end{aligned}$$

(3) $M = 3$ という事象を E，$X = 6$ という事象を F とすると，求める条件付き確率は $P_E(F)$ であり，

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}.$$

$P(E)$ は (2) で求めた $\dfrac{37}{216}$ であり，$E \cap F$ が起こるのは次の 7 通りあることから，

$$P(E \cap F) = \frac{7}{6^3} = \frac{7}{216}.$$

1 回目	2 回目	3 回目
6	3	3
6	3	$4, 5, 6$
6	$4, 5, 6$	3

ゆえに，

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{7}{216}}{\frac{37}{216}} = \boldsymbol{\frac{7}{37}}.$$

6

座標平面上の円 $x^2 + y^2 = 1$ を C_1 とする．

(1) 点 $(3,\ 4)$ を中心とする円 C_2 と，C_1 が外接するとき，C_2 の方程式を求めよ．

(2) a を定数とし，円 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 9$ を C_3 とする．C_3 が C_1 と共有点をもたないとき，a のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) r を正の定数とし，円 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ を C_4 とする．C_1 と C_4 が 2 つの交点 A，B をもち，線分 AB の長さが $\sqrt{3}$ となるとき，r の値を求めよ．

【2026 秋田大学】

解説

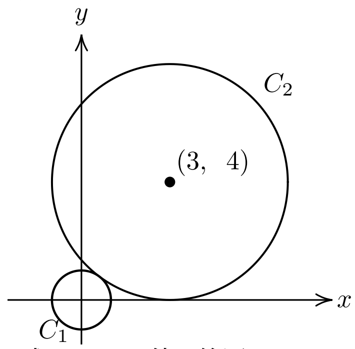
(1) C_2 の半径を R とする．C_1 と C_2 が外接する条件は，

$$\underbrace{\sqrt{3^2 + 4^2}}_{\text{中心間距離}} = \underbrace{1 + R}_{\text{半径の和}}.$$

$$\therefore \quad R = 4.$$

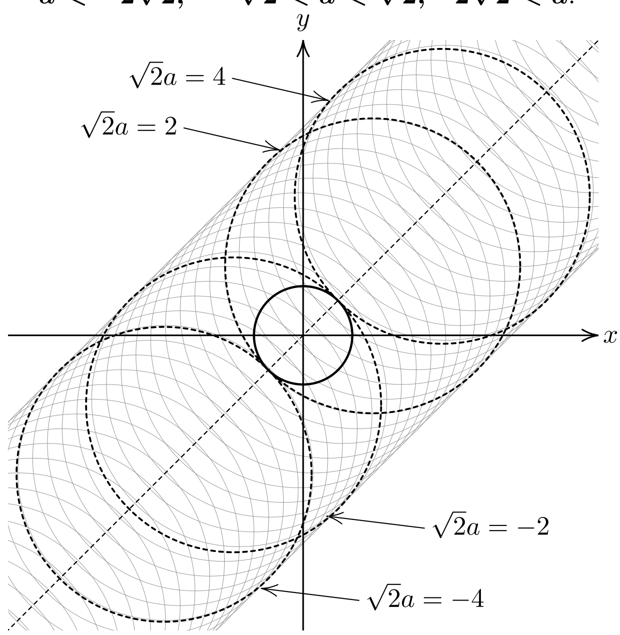
これより，C_2 の方程式は

$$\boldsymbol{(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4^2}.$$



(2) 次図により，求める a の値の範囲は，

$$\boldsymbol{a < -2\sqrt{2},\quad -\sqrt{2} < a < \sqrt{2},\quad 2\sqrt{2} < a}.$$



参考　数式による解法では次のようになる．
C_3 が C_1 と共有点をもたない条件は，連立方程式

$$(*)\quad \begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^2-2ax+y^2-2ay+2a^2=9 \end{cases}$$

が実数解をもたないことである．

$$(*)\quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+y^2=1, \\ ax+ay+(4-a^2)=0. \end{cases}$$

$a=0$ のとき，C_1 と C_3 は同心円で，半径が異なるので共有点をもたない．
$a \neq 0$ のとき，条件は，円 C_1 と直線

$$ax+ay+(4-a^2)=0$$

が共有点をもたないことであり，

$$\frac{|4-a^2|}{\sqrt{a^2+a^2}} > 1.$$

$$0 < a^2 < 2,\quad 8 < a^2.$$

以上により，求める a の値の範囲は，

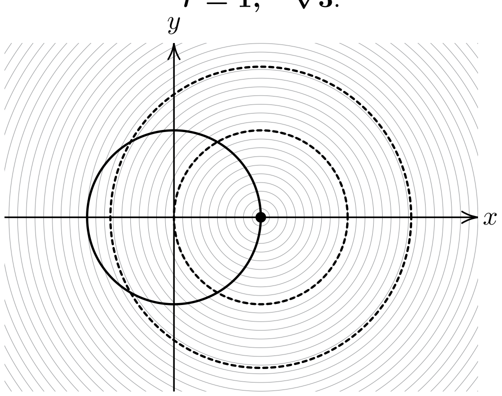
$$\boldsymbol{a < -2\sqrt{2},\quad -\sqrt{2} < a < \sqrt{2},\quad 2\sqrt{2} < a}.$$

(3) C_1，C_4 はともに x 軸に関して対称な円であるので，2 交点 A，B は x 軸対称な位置にある C_1 上の点であるので，2 交点は

$$\left(\pm\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \left(\pm\frac{1}{2},\ \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\quad (\text{複号同順})$$

である．
$\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ が C_4 上にあるのは $r=1$ のときであり，$\left(-\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ が C_4 上にあるのは $r=\sqrt{3}$ のときである．ゆえに，求める r の値は

$$\boldsymbol{r=1,\quad \sqrt{3}}.$$



7

12^{39} について，次の問いに答えよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする．
(1) 桁数を求めよ．
(2) 最高位の数字を求めよ．
(3) 最高位の次の位の数字を求めよ．
【2026 早稲田大学】

解説　$12=10^{\log_{10}12}$ であり，

$$\begin{aligned}\log_{10}12 &= \log_{10}\left(2^2\cdot 3\right) = 2\log_{10}2+\log_{10}3 \\ &= 2\times 0.3010+0.4771 = 1.0791\end{aligned}$$

であるから，

$$12 = 10^{1.0791}.$$

(1)

$$\begin{aligned}12^{39} &= \left(10^{1.0791}\right)^{39} = 10^{1.0791\times 39} \\ &= 10^{42.0849} = 10^{0.0849}\times 10^{42}\end{aligned}$$

の桁数は

$$\mathbf{43}.$$

(2) $2=10^{\log_{10}2}=10^{0.3010}$ より，

$$1=10^0<10^{0.0849}<10^{0.3010}=2$$

であるから，

$$1\times 10^{42}<12^{39}=10^{0.0849}\times 10^{42}<2\times 10^{42}$$

より，12^{39} の最高位の数字は

$$\mathbf{1}.$$

(3)

$$\begin{aligned}\log_{10}1.2 &= \log_{10}12-\log_{10}10 \\ &= 1.0791-1 = 0.0791\end{aligned}$$

により，$1.2=10^{0.0791}$ であり，

$$\begin{aligned}\log_{10}1.25 &= \log_{10}\frac{5}{4} = \log_{10}\frac{10}{8} \\ &= \log_{10}10-\log_{10}8 = 1-3\log_{10}2 \\ &= 1-3\times 0.3010 = 0.0970\end{aligned}$$

により，$1.25=10^{0.0970}$ であることから，

$$1.2<10^{0.0849}<1.25$$

の成立がわかる．この辺々に 10^{42} をかけ，

$$1.2\times 10^{42}<12^{39}<1.25\times 10^{42}$$

が得られ，これより，12^{39} の最高位の次の位の数字は

$$\mathbf{2}$$

とわかる．

8

関数

$$f(x)=\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x-\cos x)\ \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

を考える．

(1) $t=\sin x-\cos x$ とおく．$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，t のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) $f(x)$ を t を用いた式で表せ．

(3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．【2026 山口大学】

解説

(1)

合成の原理は加法定理

$$\begin{aligned} t &= \sin x-\cos x \\ &= \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}-\cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\sin x \cos \frac{\pi}{4}-\cos x \sin \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

実数 x が $0 \leqq x \leqq 2\pi$ を動くとき，$x-\dfrac{\pi}{4}$ は

$$-\frac{\pi}{4} \leqq x-\frac{\pi}{4} \leqq \frac{7}{4}\pi$$

をとり得るので，$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ は -1 以上 1 以下の実数をとり得る．したがって，t のとり得る値の範囲は

$$\boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}}.$$

(2)

$$\begin{aligned} t^2 &= (\sin x-\cos x)^2 \\ &= \sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x \\ &= 1-\sin 2x \end{aligned}$$

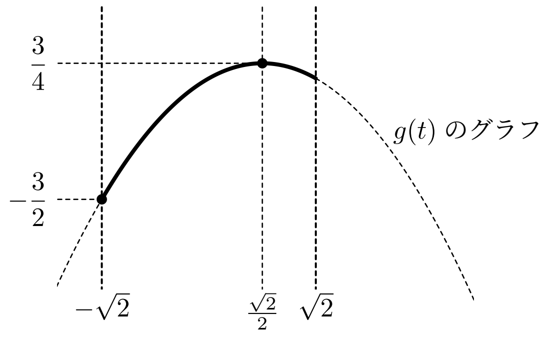
より，

$$\sin 2x = 1-t^2.$$

$$\therefore\ \ f(x)=\frac{1-t^2}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}t=\boldsymbol{\frac{-t^2+\sqrt{2}t+1}{2}}.$$

(3) $g(t)=\dfrac{-t^2+\sqrt{2}t+1}{2}$ とおくと，

$$f(x)=g(t)=-\frac{1}{2}\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$



これより，$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ において，

$$t=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ で } g(t) \text{ は最大値 } \frac{3}{4} \text{ をとり，}$$

$$t=-\sqrt{2} \text{ で } g(t) \text{ は最小値 } -\frac{3}{2} \text{ をとる．}$$

ここで，$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となる x は

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

より，

$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6},\ \ \frac{5}{6}\pi.$$

$$x=\frac{5}{12}\pi,\ \ \frac{13}{12}\pi.$$

また，$t=-\sqrt{2}$ となる x は

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

より，

$$x-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi.$$

$$x=\frac{7}{4}\pi.$$

したがって，$f(x)$ の

$$\text{最大値は } \boldsymbol{\frac{3}{4}} \quad \left(x=\boldsymbol{\frac{5}{12}\pi},\ \boldsymbol{\frac{13}{12}\pi}\right),$$

$$\text{最小値は } \boldsymbol{-\frac{3}{2}} \quad \left(x=\boldsymbol{\frac{7}{4}\pi}\right).$$

補足　(1) は，xy 平面上で単位円と直線 $t=y-x$ が共有点をもつような実数 t の値の範囲を求めることで解くこともできる．実際，

$$\frac{|t|}{\sqrt{2}} \leqq 1$$

より，

$$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

が得られる．

9

四角形 ABCD は,

$$\mathrm{AB}=7,\ \mathrm{BC}=3,\ \mathrm{CD}=5,\ \mathrm{DA}=7,\ \angle\mathrm{BAD}=60^\circ$$

を満たしている．AC と BD の交点を E とし，E を通り AB と平行な直線と直線 DC の交点を F とする．また，△ABC の外接円に F から 2 本の接線を引き，それらの接点をそれぞれ G，H とする．

(1) D は △ABC の外接円上にあることを示せ．

(2) FE = FG = FH を示せ．　【2026 宮崎大学】

解説

(1) 三角形 ABD は，AB = AD を満たすことから二等辺三角形であり，さらに，∠BAD = 60° であることから正三角形である．

また，三角形 BCD で余弦定理から，

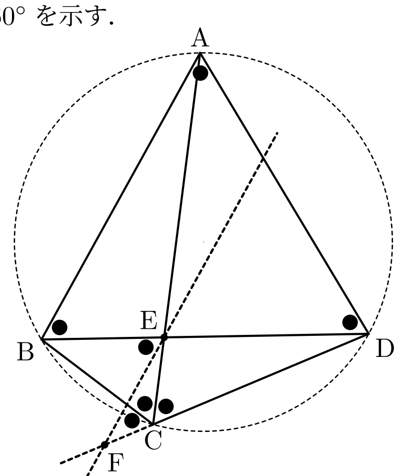
$$\cos\angle\mathrm{BCD}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{1}{2}$$

より，∠BCD = 120° であることがわかり，

$$\angle\mathrm{BAD}+\angle\mathrm{BCD}=60^\circ+120^\circ=180^\circ$$

が成り立つので，4 点 A，B，C，D は同一円周上にある．これより，D は △ABC の外接円上にあることが示された．　(証明終り)

(2) 図の●印は 60° を示す．



ここで，∠BEF = ∠BCF であることに着目すると，四角形 BFCE は円に内接する四角形であることがわかり，円周角の定理から，

$$\angle\mathrm{BFE}=\mathrm{BCE}=60^\circ.$$

これより，三角形 BFE は正三角形である．

さらに，

$$\angle\mathrm{FBD}=\angle\mathrm{DAB}$$

であることから，接弦定理の逆により，B における三角形 ABD の外接円の接線が BF である．

これより，FE = FG = FH が従う．　(証明終り)

参考　3 辺の長さが 8，7，5 である三角形，3 辺の長さが 8，7，3 である三角形ではともに 7 の長さの辺の対角は 60° である．また，3 辺の長さが 7，5，3 である三角形では 7 の長さの辺の対角は 120° である．

$$\begin{cases}\text{花子 }(8,7,5),\\ \text{花見 }(8,7,3)\end{cases}\longrightarrow\quad 7\text{ の対角が }60^\circ$$

$$\text{七五三 }(7,5,3)\quad\longrightarrow\quad 7\text{ の対角が }120^\circ$$

また，次のトレミーの定理により，

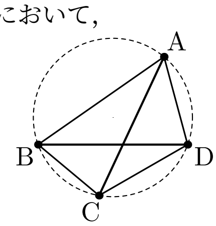
$$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}+\mathrm{CD}=3+5=8$$

であることがわかる．

Ptolemy(トレミー) の定理

円 K に内接する四角形 ABCD において，

$$\underbrace{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{DB}}_{\text{対角線の積}}=\underbrace{\underbrace{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DC}}_{\text{対辺の積}}+\underbrace{\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}}_{\text{対辺の積}}}_{\text{「対辺の積」の和}}$$



が成り立つ．

補足　問われてはいないが，線分 CE の長さをすぐに求めることはできるだろうか？ ∠BCD = 120° であり，CE は ∠ABD の二等分線になっており，

$$\angle\mathrm{BCE}=60^\circ=\angle\mathrm{DCE}$$

に着目すると，面積を利用することで CE の長さを間接的に求めることができる．実際，CE = x とおくと，

$$\triangle\mathrm{BCD}=\triangle\mathrm{BCE}+\triangle\mathrm{ECD}$$

により，

$$\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120^\circ=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(3+5)\cdot\sin60^\circ.$$

これより，

$$x=\frac{3\cdot5}{3+5}=\frac{15}{8}$$

とわかる．