A $\boxed{1}$

点 O を原点とする座標平面上で，2 点 $(2,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ を焦点とし，焦点からの距離の和が $\dfrac{20}{3}$ である楕円を考える．この楕円上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における接線を ℓ とする．ただし，$p,\ q$ は正の実数とする．ℓ と x 軸との交点を A とし，ℓ と y 軸との交点を B とする．$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を最小にする点 P の座標を求め，そのときの $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を求めよ．

【2025 東京理科大学】

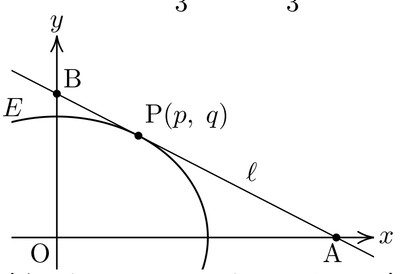
解説　この楕円を E とする．楕円 E の焦点が x 軸上にあり，楕円の中心が原点であることから，

$$C : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$$

とおける．条件から，

$$\sqrt{a^2-b^2}=2, \qquad 2a=\frac{20}{3}.$$

$$\therefore\ a=\frac{10}{3},\quad b=\frac{8}{3}.$$



点 P の座標を $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ とおくと，点 P が楕円 E の第 1 象限の部分を動くことから，θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を変化する．ℓ の式は

$$\ell : \frac{a\cos\theta}{a^2}x+\frac{b\sin\theta}{b^2}y=1$$

より，

$$\mathrm{A}\left(\frac{a}{\cos\theta},\ 0\right),\quad \mathrm{B}\left(0,\ \frac{b}{\sin\theta}\right).$$

これより，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\cos\theta}\cdot\frac{b}{\sin\theta}=\frac{ab}{\sin 2\theta}$$

は $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときに最小となる．よって，求める点 P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{5}{3}\sqrt{2},\ \ \frac{4}{3}\sqrt{2}}\right)$$

であり，$\triangle\mathrm{OAB}$ の最小値は $\boldsymbol{\dfrac{80}{9}}$.

参考　$p,\ q$ のまま解くと次のようになる．

$$\ell : \frac{p}{a^2}x+\frac{q}{b^2}y=1$$

より，

$$\mathrm{A}\left(\frac{a^2}{p},\ 0\right),\quad \mathrm{B}\left(0,\ \frac{b^2}{q}\right).$$

これより，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{p}\cdot\frac{b^2}{q}=\frac{a^2b^2}{2pq}.$$

これより，実数 $p,\ q$ が

$$p>0,\quad q>0,\quad \frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1$$

を満たしながら変化するとき，pq の最大を求めることに帰着される．相加平均と相乗平均の大小関係から，

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}\geqq 2\sqrt{\frac{p^2}{a^2}\cdot\frac{q^2}{b^2}}$$

すなわち

$$1\geqq 2\cdot\frac{p}{a}\cdot\frac{q}{b}.$$

$$pq\leqq\frac{ab}{2}.$$

ここで，等号は

$$\frac{p^2}{a^2}=\frac{q^2}{b^2}\ \left(=\frac{1}{2}\right)\ \text{すなわち}\ p=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad q=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

のときに成り立ち，このとき，pq は最大値 $\dfrac{ab}{2}$ をとる．

A $\boxed{2}$

定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^4 x-\tan^2 x-2}{\tan^2 x-4}dx$ を求めよ．

【2025 九州大学】

解説　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^4 x-\tan^2 x-2}{\tan^2 x-4}dx$ に対して，$\tan x=t$ とおくと，

$$dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx=(1+\tan^2 x)dx$$

より，

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\tan^2 x-2)(\tan^2 x+1)}{\tan^2 x-4}dx\\
&=\int_0^1\frac{t^2-2}{t^2-4}dt\\
&=\int_0^1\frac{t^2-4+2}{t^2-4}dt=\int_0^1\left(1+\frac{2}{t^2-4}\right)dt\\
&=1+\int_0^1\frac{2}{(t+2)(t-2)}dt\\
&=1+\int_0^1\left(\frac{-\frac{1}{2}}{t+2}+\frac{\frac{1}{2}}{t-2}\right)dt\\
&=1+\frac{1}{2}\Big[\log|t-2|-\log|t+2|\Big]_0^1\\
&=\boldsymbol{1-\frac{1}{2}\log 3}.
\end{aligned}$$

A $\boxed{3}$

$f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\log x$ が $0<x<2$ において極小値をもつような実数 a の値の範囲を求めよ.

【2025 学習院大学】

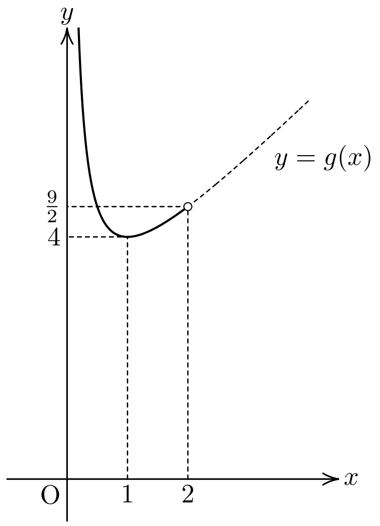
解説

$$f'(x)=a\cdot\frac{-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x}$$
$$=\frac{(x+1)^2-ax}{x(x+1)^2}=\frac{\left(x+2+\dfrac{1}{x}\right)-a}{(x+1)^2}.$$

ここで，$g(x)=x+2+\dfrac{1}{x}$ とおくと，

$$g'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}.$$

$x>0$ における $y=g(x)$ のグラフは次のようになる.



これより，

$$\begin{cases} a\geqq\dfrac{9}{2}\Longrightarrow f(x) \text{ は } 0<x<2 \text{ で極小値をもたない,}\\ 4<a<\dfrac{9}{2}\Longrightarrow f(x) \text{ は } 0<x<2 \text{ で極小値をもつ,}\\ a\leqq 4\Longrightarrow f(x) \text{ は } 0<x<2 \text{ で極小値をもたない.}\end{cases}$$

よって，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{4<a<\frac{9}{2}}.$$

A $\boxed{4}$

極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(\int_1^t\log\frac{x+1}{x}dx-\log t\right)$ を求めよ.

【2025 横浜国立大学】

解説

$$\int_1^t\log\frac{x+1}{x}dx=\int_1^t\big(\log(x+1)-\log x\big)dx$$
$$=\Big[x\log x-x\Big]_2^{t+1}-\Big[x\log x-x\Big]_1^t$$
$$=(t+1)\log(t+1)-t\log t-2\log 2$$

より，

$$\int_1^t\log\frac{x+1}{x}dx-\log t$$
$$=(t+1)\log(t+1)-(t+1)\log t-2\log 2$$
$$=(t+1)\log\frac{t+1}{t}-2\log 2$$
$$=\log\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}+\log\left(1+\frac{1}{t}\right)-2\log 2$$
$$\to\log e+\log 1-2\log 2=\boldsymbol{1-2\log 2}\ \ (t\to\infty).$$

A $\boxed{5}$

i を虚数単位とする．複素数 z が，絶対値が 2 である複素数全体を動くとき，$\left|z-\dfrac{i}{z}\right|$ の最大値と最小値を求めよ.

【2025 京都大学】

解説　$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおけ，θ が $0\leqq\theta<2\pi$ をくまなく動く．このとき，

$$z-\frac{i}{z}=2(\cos\theta+i\sin\theta)-\frac{i}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)$$
$$=\left(2\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)+\left(2\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)i$$

より，

$$\left|z-\frac{i}{z}\right|^2=\left(2\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2+\left(2\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2$$
$$=\frac{17}{4}\cos^2\theta+\frac{17}{4}\sin^2\theta-4\sin\theta\cos\theta$$
$$=\frac{17}{4}-2\sin 2\theta.$$

これより，$\left|z-\dfrac{i}{z}\right|$ の最大値は，

$$\sqrt{\frac{17}{4}+2}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

であり，最小値は

$$\sqrt{\frac{17}{4}-2}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

である.

注意　次のようにも解くこともできる．

$$\left|z-\frac{i}{z}\right|=\left|\frac{z^2-i}{z}\right|=\frac{|z^2-i|}{|z|}=\frac{|z^2-i|}{2}.$$

$|z^2-i|$ は点 z^2 と点 i との距離を表しており，点 z が原点中心，半径 2 の円上をくまなく動くとき，点 z^2 は原点中心，半径 4 の円上をくまなく動くので，$|z^2-i|$ は

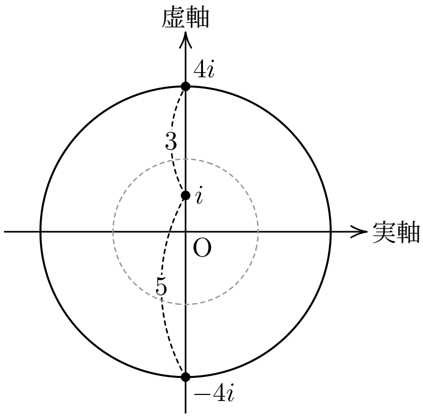
$z^2=-4i$ のときに，最大値 5 をとり，

$z^2=4i$ のときに，最小値 3 をとる．

ゆえに，$\left|z-\dfrac{i}{z}\right|$ は

$z^2=-4i$ のときに，最大値 $\dfrac{5}{2}$ をとり，

$z^2=4i$ のときに，最小値 $\dfrac{3}{2}$ をとる．



A 6

極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-n^2}}{1+2+\cdots+n}$ を求めよ．【2025 島根大学】

解説

$$\frac{\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-n^2}}{1+2+\cdots+n}$$
$$=\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}}{\frac{1}{2}n(n+1)}=2\cdot\frac{\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}{1+\frac{1}{n}}$$
$$\to\frac{2\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx}{1+0}\quad(n\to\infty).$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ は単位円 $x^2+y^2=1$ の $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ である四分円の面積を表すので，

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

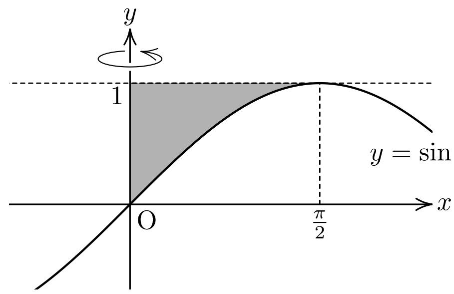
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-1^2}+\cdots+\sqrt{n^2-n^2}}{1+\cdots+n}=2\times\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}.$$

A 7

曲線 $y=\sin x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と y 軸および直線 $y=1$ によって囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

【2025 横浜市立大学】

解説　求める体積を V とする．



$$\begin{aligned}V&=\int_0^1\pi x^2dy\qquad(y=\sin x)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi x^2\cos x dx\\&=\pi\Big[x^2\cdot\sin x-2x\cdot(-\cos x)+2\cdot(-\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\boldsymbol{\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)}.\end{aligned}$$

参考　shell integral (本編 p.146) で計算すると，次のようになる．

$$\begin{aligned}V&=\underbrace{\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot 1}_{\text{円柱}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi x\sin x dx\\&=\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx\right).\end{aligned}$$

ここで，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx=\Big[x\cdot(-\cos x)-1\cdot(-\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

より，

$$V=\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right).$$