A $\boxed{1}$

極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}$ を求めよ．

【2026 福島大学】

解説　和積公式を用いて，

$$\begin{aligned}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}&=\frac{2\sin 4x\sin x}{x^2}\\&=2\cdot\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4\cdot\frac{\sin x}{x}\\&\to 2\cdot 1\cdot 4\cdot 1=\mathbf{8}\quad (x\to 0).\end{aligned}$$

参考　(やや煩雑だが) 次のように解くこともできる．

一般に，$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ より，

$$1-\cos 2\theta=2\sin^2\theta$$

が成り立つことに着目すると，

$$\begin{aligned}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}&=\frac{(1-\cos 5x)-(1-\cos 3x)}{x^2}\\&=\frac{2\sin^2\frac{5}{2}x-2\sin^2\frac{3}{2}x}{x^2}\\&=2\left(\frac{\sin^2\frac{5}{2}x}{x^2}-\frac{\sin^2\frac{5}{2}x}{x^2}\right)\\&=2\left\{\left(\frac{\sin^2\frac{5}{2}x}{\frac{5}{2}x}\right)^2\cdot\frac{25}{4}-\left(\frac{\sin^2\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}\right)^2\cdot\frac{9}{4}\right\}\\&\to 2\left(\cdot 1^2\cdot\frac{25}{4}-1^2\cdot\frac{9}{4}\right)=\mathbf{8}\quad (x\to 0).\end{aligned}$$

A $\boxed{2}$

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10\cdot 7^n-3\cdot 2^{3n+1}}{56^n}$ の和を求めよ．

【2026 山形大学】

解説

$$\begin{aligned}\frac{10\cdot 7^n-3\cdot 2^{3n+1}}{56^n}&=10\left(\frac{7}{56}\right)^n-6\left(\frac{8}{56}\right)^n\\&=10\left(\frac{1}{8}\right)^n-6\left(\frac{1}{7}\right)^n\end{aligned}$$

である．ここで，$\left|\frac{1}{8}\right|<1$，$\left|\frac{1}{7}\right|<1$ であるので，2 つの無限等比級数について，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{7},$$

$$\frac{(\text{初項})}{1-(\text{公比})}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n=\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{1}{6}$$

が成り立つことから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10\cdot 7^n-3\cdot 2^{3n+1}}{56^n}$ も収束し，その和は

$$10\cdot\frac{1}{7}-6\cdot\frac{1}{6}=\boldsymbol{\frac{3}{7}}.$$

注意　次のような書き方はよくない．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10\cdot 7^n-3\cdot 2^{3n+1}}{56^n}=\sum_{n=1}^{\infty}10\left(\frac{1}{8}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}6\left(\frac{1}{7}\right)^n.$$

この等式は，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}10\left(\frac{1}{8}\right)^n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}6\left(\frac{1}{7}\right)^n$ の収束がともに確認した後に正当化できる．ここで用いた議論は「$\begin{cases}\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n=A,\\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}B_n=B\end{cases}$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(A_n-B_n)=A-B$ が成り立つ」である．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(A_n-B_n)$ が収束していたとしても，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}A_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}B_n$ が収束しているとは限らないことに注意せよ．

A $\boxed{3}$

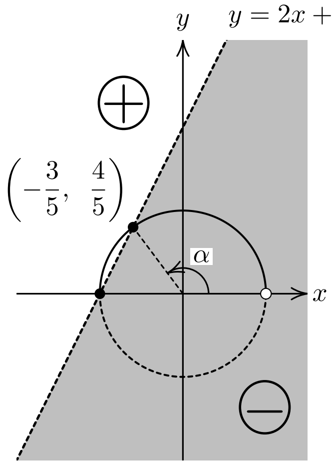
$0\leqq\theta<\pi$ のとき，$\dfrac{1-4\sin\theta-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ の最小値を求めよ．

【2026 早稲田大学】

解説　$f(\theta)=\dfrac{1-4\sin\theta-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ とおく．

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=\frac{(-4\cos\theta+\sin\theta)(1+\cos\theta)-(1-4\sin\theta-\cos\theta)(-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2}\\&=\frac{\sin\theta-2\cos\theta-2}{(1+\cos\theta)^2}.\end{aligned}$$

ここで，$y-2x-2$ の符号は次図のようになる．



α を $0<\alpha<\pi$，$\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ を満たす実数とすると，$f(\theta)$ の $0\leqq\theta<\pi$ の増減は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘	極小	↗	

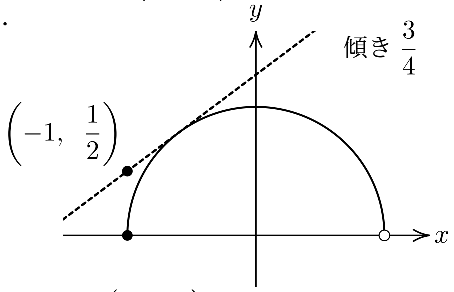
これより，$f(\theta)$ は $x=\alpha$ のときに最小となり，求める最小値は

$$f(\alpha)=\frac{1-4\cdot\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}=\mathbf{-4}.$$

注意　本問を数学 IAIIB の範疇で解決してみよう．三角関数の定義を思い出すことで，“図形と方程式” で学んだ知恵を援用して解くことができる．本問を “図形と方程式” の問題に言い換えると次のようになる．

> 点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < \pi)$ の軌跡を C とするとき，C と図形 $\dfrac{1-4y-x}{1+x} = k$ が共有点をもつような実数 k の最小値を求めよ．

$x \neq -1$ において，$\dfrac{1-4y-x}{1+x} = k$ が表す図形は直線 $1-4y-x = k(1+x)$ すなわち $y = -\dfrac{k+1}{4}(x+1) + \dfrac{1}{2}$ であり，これは点 $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通る傾きが $-\dfrac{k+1}{4}$ の直線である．



傾き m で点 $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通る直線 $y = m(x+1) + \dfrac{1}{2}$ が単位円と接する条件は

$$\frac{|2m+1|}{\sqrt{4m^2+4}} = 1.$$

$$4m^2 + 4 = 4m^2 + 4m + 1.$$

$$m = \frac{3}{4}.$$

したがって，傾き $-\dfrac{k+1}{4}$ のとり得る値の範囲は

$$-\infty < -\frac{k+1}{4} \leqq \frac{3}{4}.$$

$$\therefore\ \ -4 \leqq k < +\infty.$$

ゆえに，求める最小値は

$$\boldsymbol{-4}.$$

A 4

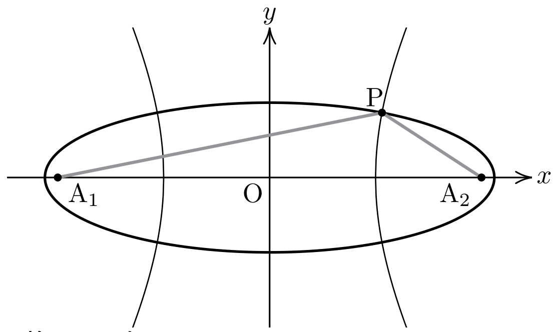
> 楕円 $C_1 : \dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$ と双曲線 $C_2 : \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{6} = 1$ を考え，C_1 の焦点を x 座標が小さい順に A_1，A_2 とし，C_1 と C_2 の交点のうち第 1 象限にあるものを P とする．C_2 の焦点も A_1, A_2 であることを示し，線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{P}$ と $\mathrm{A}_2\mathrm{P}$ の長さを求めよ．さらに，$\cos\angle \mathrm{A}_1\mathrm{P}\mathrm{A}_2$ の値を求めよ．　【2026 滋賀県立大学】

解説　楕円 C_1 の 2 焦点は $\left(\pm\sqrt{9-1},\ 0\right)$ すなわち $(\pm 2\sqrt{2},\ 0)$ であり，

$$\mathrm{A}_1(-2\sqrt{2},\ 0), \qquad \mathrm{A}_2(2\sqrt{2},\ 0).$$

一方，双曲線 C_2 の 2 焦点は $\left(\pm\sqrt{2+6},\ 0\right)$ すなわち $(\pm 2\sqrt{2},\ 0)$ であり，C_2 の 2 焦点も A_1，A_2 である．

（証明終り）



P が楕円 C_1 上にあることから，

$$\mathrm{A}_1\mathrm{P} + \mathrm{A}_2\mathrm{P} = (\text{長軸の長さ}) = 2 \times 3 = 6 \qquad \cdots ①$$

を満たし，$\mathrm{A}_1\mathrm{P} > \mathrm{A}_2\mathrm{P}$ であり，P が双曲線 C_2 上にあることから，

$$\mathrm{A}_1\mathrm{P} - \mathrm{A}_2\mathrm{P} = (\text{頂点間距離}) = 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \qquad \cdots ②$$

を満たす．①，② により，

$$\mathrm{A}_1\mathrm{P} = \boldsymbol{3 + \sqrt{2}}, \quad \mathrm{A}_2\mathrm{P} = \boldsymbol{3 - \sqrt{2}}.$$

三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{P}\mathrm{A}_2$ で余弦定理を用いると，

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2{}^2 = \mathrm{A}_1\mathrm{P}^2 + \mathrm{A}_2\mathrm{P}^2 - 2 \cdot \mathrm{A}_1\mathrm{P} \cdot \mathrm{A}_2\mathrm{P} \cos\angle \mathrm{A}_1\mathrm{P}\mathrm{A}_2$$

より，

$$\cos\angle \mathrm{A}_1\mathrm{P}\mathrm{A}_2 = \frac{(3+\sqrt{2})^2 + (3-\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{2})^2}{2(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \boldsymbol{-\frac{5}{7}}.$$

参考　共焦 2 次曲線に関する話題は本編の p.134 にもある．本問は本編 p.124(2016 年大阪府立大) の数値変えであり，楕円の定義 (①) と双曲線の定義 (②) から “和差算” として解く有名問題である．交点 P の座標を C_1 の式と C_2 の式を連立して計算すると $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ と求まり，2 点間距離として，$\mathrm{A}_1\mathrm{P}$, $\mathrm{A}_2\mathrm{P}$ を求めることももちろん可能であるが，解答のように解くのがスマートであろう．

A 5

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x \cos x}{\left(\sin^2 x + \frac{1}{2}\right)^2} dx$$ の値を求めよ．

【2026 藤田医科大学】

解説　$\sin^2 x + \dfrac{1}{2} = t$ とおくと，$2\sin x \cos x\, dx = dt$ であり，$x : 0 \to \dfrac{\pi}{6}$ のとき，$t : \dfrac{1}{2} \to \dfrac{3}{4}$ であるから，

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x \cos x}{\left(\sin^2 x + \frac{1}{2}\right)^2} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{2t^2} dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{4}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}.$$

注意　本質的には上の計算と同じであるが，置換積分を行わず，直接計算すると次のようになる．

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x \cos x}{\left(\sin^2 x + \frac{1}{2}\right)^2} dx = \left[-\frac{1}{2\left(\sin^2 x + \frac{1}{2}\right)}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{4}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}.$$

A 6

複素数平面上の点 z が不等式 $|z + \overline{z}| + |z - \overline{z}| \leqq 2$ を満たすとき，点 z の全体はどのような図形を表すか．$z = x + yi$　(x, y は実数) とおいて答えよ．また，このとき $|z - 1 - i|$ の最大値と最小値，およびそのときの z の値をそれぞれ求めよ．

【2026 長崎大学】

解説　$z = x + yi$　(x, y は実数) とおくと，$\overline{z} = x - yi$ であり，

$$z + \overline{z} = 2x, \quad z - \overline{z} = 2yi$$

であるから，条件 $|z + \overline{z}| + |z - \overline{z}| \leqq 2$ は

$$|2x| + |2yi| \leqq 2$$

すなわち

$$2|x| + 2|y|\underbrace{|i|}_{1} \leqq 2$$

すなわち

$$\boldsymbol{|x| + |y| \leqq 1} \qquad \cdots(*)$$

となる．xy 平面上で $(*)$ の表す領域を D とする．

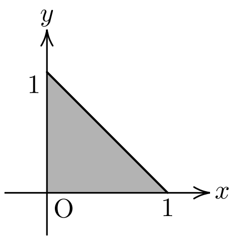
$|-x| = |x|$　により，D は y 軸対称であり，

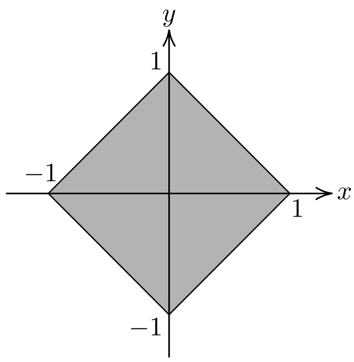
$|-y| = |y|$　により，D は x 軸対称である．

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ においては $(*)$ は

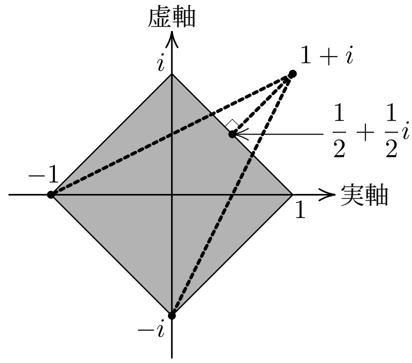
$$x + y \leqq 1$$

となり，図示すると次の左図のようになり，D は右図のようになる．





$|z - 1 - i| = |z - (1 + i)|$ は点 z と点 $1 + i$ との距離を表しており，点 z が領域 D を動くとき，この距離が最大となるのは，z が -1，$-i$ のときであり，最小となるのは，z が $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ のときである．



したがって，$|z - 1 - i|$ の

最大値は $\boldsymbol{\sqrt{5}}$　$(z = \boldsymbol{-1},\ \boldsymbol{-i})$，

最小値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$　$\left(z = \boldsymbol{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i}\right)$.

参考　一般に，点 $(a,\ b)$ と点 $(c,\ d)$ の「l_1 距離」というものは

$$|a - c| + |b - d|$$

で定められる．京都のような格子状の道で座標軸に沿って移動する (斜めにはいけない) 場合，$(a,\ b)$ から点 $(c,\ d)$ への移動距離は l_1 距離になる．これに対し，2 点間をまっすぐ結んだ線分の距離

$$\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

は l_2 距離 (あるいはユークリッド距離) と呼ばれる．$(*)$ の左辺は原点と点 $(x,\ y)$ との l_1 距離を表している．D の境界になっている正方形は原点からの l_1 距離が 1 で一定である点の集合ということになり，正方形が l_1 距離での単位円になっていることを示している (円は丸のことではない!)．

A $\boxed{7}$

媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = e^{-t}(\cos t + \sin t), \\ y = e^{-t}(\cos t - \sin t + 2) \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と表される曲線の長さを求めよ.　　【2026 三重大学】

解説

$$\begin{aligned} x' &= -e^{-t}(\cos t + \sin t) + e^{-t}(-\sin t + \cos t) \\ &= -2e^{-t}\sin t, \\ y' &= -e^{-t}(\cos t - \sin t + 2) + e^{-t}(-\sin t - \cos t) \\ &= -2e^{-t}(\cos t + 1) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} (x')^2 + (y')^2 &= 4e^{-2t}\{\sin^2 t + (\cos t + 1)^2\} \\ &= 4e^{-2t}(\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1} + 2\cos t + 1) \\ &= 8e^{-2t}\underbrace{(1 + \cos t)}_{2\cos^2\frac{t}{2}} = 16e^{-2t}\cos^2\frac{t}{2}. \end{aligned}$$

よって,

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 4e^{-t}\left|\cos\frac{t}{2}\right|.$$

これより，求める長さは

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt &= \int_0^\pi 4e^{-t}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt \\ &= 4\int_0^\pi e^{-t}\cos\frac{t}{2}dt. \end{aligned}$$

ここで，$I = \displaystyle\int_0^\pi e^{-t}\cos\frac{t}{2}dt$ とおき，部分積分を 2 回施すと,

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{e^{-t}}{-1}\cdot\cos\frac{t}{2} - e^{-t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\right)\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-t}\cdot\left(-\frac{1}{4}\cos\frac{t}{2}\right)dt \\ &= \frac{e^{-\pi}}{2} + 1 - \frac{1}{4}I \end{aligned}$$

より,

$$\frac{5}{4}I = \frac{e^{-\pi}}{2} + 1.$$

$$\therefore\ I = \frac{2(e^{-\pi} + 2)}{5}.$$

したがって，求める長さは

$$4I = \boldsymbol{\frac{8(e^{-\pi} + 2)}{5}}.$$

$\boxed{\text{注意}}$　部分積分の反復適用については，本編の p.138 を参照せよ．ちなみに，部分積分の反復適用は,『解析学 微積分編』(土倉保 著) では p.84 で「n 次の部分積分公式」という名前で紹介されている．本編の p.141 で注意したように，(指数関数)×(三角関数) の形を部分積分する際には，三角関数を微分側に回した方が良いが，逆にしても当然正しい値は求められる．その計算を掲載しておく.

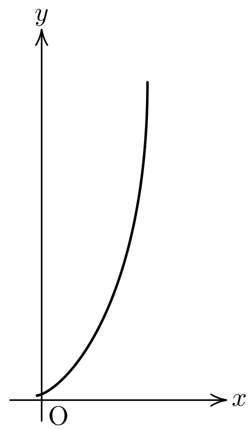
$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi e^{-t}\cos\frac{t}{2}dt \\ &= \left[e^{-t}\cdot 2\sin\frac{t}{2} - (-e^{-t})\cdot\left(-4\cos\frac{t}{2}\right)\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-t}\cdot\left(-4\cos\frac{t}{2}\right)dt \\ &= 2e^{-\pi} + 4 - 4I \end{aligned}$$

より,

$$5I = 2(e^{-\pi} + 2).$$

$$\therefore\ I = \frac{2(e^{-\pi} + 2)}{5}.$$

$\boxed{\text{参考}}$　本問の曲線を図示すると次のようになる.



Coffee Break　3 つの正の実数 a, b, c に対して,

$$\underbrace{\frac{a + b + c}{3}}_{\text{相加平均}} \geqq \underbrace{\sqrt[3]{abc}}_{\text{相乗平均}}$$

が成り立つ．また，等号が成り立つのは $a = b = c$ の場合に限る．これを次の問題に利用してみよう.

問題

$f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$　$(x > 0)$ の最小値を求めよ.

$\dfrac{16}{x}$ を $\dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{x}$ と真っ二つに分割し,

$$f(x) = x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \geqq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{8}{x}\cdot\frac{8}{x}} = 12$$

の成立がいえ，さらに，$f(2) = 12$ であることから,

$f(x)$ の最小値は **2**

であることがいえる.