1 座標平面上に楕円 $C : x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ と 2 点 A$(0,\ \sqrt{3})$，B$(0,\ -\sqrt{3})$ がある．$m > 0$ とし，点 A を通る傾き m の直線を ℓ とする．楕円 C と直線 ℓ との二つの交点を P，Q とし，2 点 P，Q の x 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta\ (\alpha > \beta)$ とする．

(1) $\alpha + \beta$ と $\alpha\beta$ をそれぞれ m を用いて表せ．

(2) 線分 PQ の長さを m を用いて表せ．

(3) 線分 BP と線分 BQ の長さの和が 5 であるとき，線分 PQ の長さを求めよ．また，そのときの m の値を求めよ．

(4) m が (3) で求めた値であるとき，△BPQ の面積を求めよ．

2 (1) 関数 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$ の導関数を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ において，不等式 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geqq 1 + \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}dx$ の値を求めよ．

(4) 円周率 π についての不等式 $\pi > 3.125$ を示せ．

3 $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{11} + i\sin\dfrac{2\pi}{11}$，$\beta = \cos\dfrac{2\pi}{11} - i\sin\dfrac{2\pi}{11}$ とし，

$$A = \alpha + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^9, \qquad B = \beta + \beta^3 + \beta^4 + \beta^5 + \beta^9$$

とおく．ただし，i は虚数単位とする．

(1) $\alpha^{11} + \beta^{11}$ と $\alpha^2 - \beta^9$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) $A + B$ の値を求めよ．

(3) AB の値を求めよ．

(4) $A - B$ の値を求めよ．

4 e を自然対数の底とする．$x > 0$ の範囲で指数関数 $y = e^x$ と多項式関数 $y = x^n$ (n は自然数) を比較する．

(1) 自然数 n に対し，関数 $y = \dfrac{e^x}{x^n}$ $(x > 0)$ の最小値 a_n とそのときの x の値を求めよ．また，$y = \dfrac{e^x}{x^n}$ のグラフが下に凸であることを示せ．

(2) 正の定数 a に対し，$x > 0$ の範囲での関数 $y = e^x$ のグラフと関数 $y = ax^n$ のグラフの共有点の個数を求めよ．

(3) (1) で求めた a_n を用いて $f_n(x) = \dfrac{e^x}{a_n x^n}$ とおき，$f_n(x) = f_{n+1}(x)$ を満たす x を x_n とする．x_n を求めよ．

(4) (3) で求めた x_n に対して $n < x_n < n+1$ を示し，さらに不等式 $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ を証明せよ．

5 n を 0 以上の整数とする．区間 $1 \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f_n(x) = \dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$ および定積分

$I_n = \displaystyle\int_1^{\pi} f_n(x)dx$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 正の整数 k に対して $f_k(x) - f_{k-1}(x)$ を計算せよ．

(2) 正の整数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k}$ を I_n を用いて表せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}$ の和を求めよ．