B **1**

座標平面上に楕円 $C : x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ と 2 点 $\mathrm{A}(0,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(0,\ -\sqrt{3})$ がある．$m>0$ とし，点 A を通る傾き m の直線を ℓ とする．楕円 C と直線 ℓ との二つの交点を P，Q とし，2 点 P，Q の x 座標をそれぞれ α, β $(\alpha>\beta)$ とする．

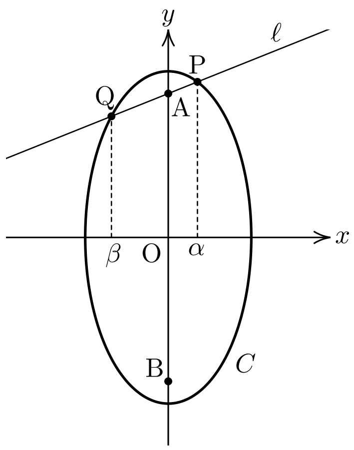
(1) $\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ をそれぞれ m を用いて表せ．

(2) 線分 PQ の長さを m を用いて表せ．

(3) 線分 BP と線分 BQ の長さの和が 5 であるとき，線分 PQ の長さを求めよ．また，そのときの m の値を求めよ．

(4) m が (3) で求めた値であるとき，△BPQ の面積を求めよ．　【2026 広島大学】

解説　A，B は楕円 C の焦点である．



(1) P，Q は $\ell : y=mx+\sqrt{3}$ と C との共有点であるから，その x 座標である α, β は

$$x^2+\frac{(mx+\sqrt{3})^2}{4}=1$$

すなわち

$$(m^2+4)x^2+2\sqrt{3}\,mx-1=0$$

の 2 解である．ゆえに，解と係数の関係から，

$$\boldsymbol{\alpha+\beta=-\frac{2\sqrt{3}m}{m^2+4},\quad \alpha\beta=\frac{-1}{m^2+4}}.$$

(2)

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{1^2+m^2}(\alpha-\beta)$$

に注意する．ここで，

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\\&=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\end{aligned}$$

であることから，(1) により，

$$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2&=\left(-\frac{2\sqrt{3}m}{m^2+4}\right)^2-4\cdot\left(\frac{-1}{m^2+4}\right)\\&=\frac{12m^2+4(m^2+4)}{(m^2+4)^2}\\&=\frac{16(m^2+1)}{(m^2+4)^2}\end{aligned}$$

とわかるので，

$$\alpha-\beta=\frac{4\sqrt{m^2+1}}{m^2+4}.$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\mathrm{PQ}=\frac{4(m^2+1)}{m^2+4}}.$$

(3) P，Q は楕円 C 上の点であるから，

$$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=(\text{長軸の長さ})=2\times2=4,$$

$$\mathrm{AQ}+\mathrm{BQ}=(\text{長軸の長さ})=2\times2=4$$

を満たすので，三角形 BPQ の周の長さは

$$\mathrm{BP}+\underbrace{\mathrm{PA}+\mathrm{AQ}}_{\mathrm{PQ}}+\mathrm{QB}=8$$

である．したがって，$\mathrm{BP}+\mathrm{BQ}=5$ となる条件は，

$$\mathrm{PQ}=8-5=3$$

であり，

$$\frac{4(m^2+1)}{m^2+4}=3$$

より，

$$m=\boldsymbol{2\sqrt{2}}.$$

(4) $m=2\sqrt{2}$ のとき，$\alpha-\beta=1$ であり，

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{BPQ}&=\triangle\mathrm{QAB}+\triangle\mathrm{PAB}\\&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot(\alpha-\beta)\\&=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot1=\boldsymbol{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

B **2**

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$ の導関数を求めよ．

(2) $0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ において，不等式 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\geqq1+\dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}dx$ の値を求めよ．

(4) 円周率 π についての不等式 $\pi>3.125$ を示せ．

【2026 青山学院大学】

解説　$f(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ $(-1<x<1)$.

(1)

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x)$$
$$= x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3}}.$$

(2) $g(x) = f(x) - \left(1 + \dfrac{x^2}{2}\right)$ とおくと,

$$g'(x) = f'(x) - x$$
$$= \frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^3} - x$$
$$= x\left\{\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3} - 1\right\}$$
$$= x \cdot \frac{1-(\sqrt{1-x^2})^3}{(\sqrt{1-x^2})^3}$$

$0 < x < \dfrac{1}{2}$ において $g'(x) > 0$ であるから, $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ で $g(x)$ は単調増加．さらに，$g(0) = 0$ であるから, $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ において $g(x) \geqq 0$ すなわち $f(x) \geqq 1 + \dfrac{x^2}{2}$ であることが示された.　(証明終り)

(3) $x = \sin\theta \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく置換積分を実行すると,

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta|, \quad dx = \cos\theta d\theta,$$

$x : 0 \to \dfrac{1}{2}$ のとき，$\theta : 0 \to \dfrac{\pi}{6}$ であるから,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}.$$

(4) (2) で示した不等式での等号成立は $x = 0$ のときのみであるから,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx > 0$$

すなわち

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx > \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)dx$$

が成り立つ．ここで,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)dx = \left[x + \frac{x^3}{6}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{25}{48}$$

であり，これと (3) により,

$$\frac{\pi}{6} > \frac{25}{48}$$

の成立がわかる．これより,

$$\pi > \frac{25}{8} = 3.125$$

が成り立つ.　(証明終り)

注意　(2) は本質的には,「$0 \leqq X \leqq \dfrac{1}{4}$ において，不等式 $\dfrac{1}{\sqrt{1-X}} \geqq 1 + \dfrac{X}{2}$ を示せ」という問題である．(2) の問題単独であれば，x の関数ではなく $x^2 = X$ の関数と捉える方が自然であるが，(3)，(4) への繋がりを考えると「2 乗」の意図がわかるであろう.

参考　本問の背景には $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ のテイラー展開

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots$$

がある．x^4 の項まで含めて考えると本問の結果は次のように，より良い π の評価を与える．(2) に対応する主張として，$0 < x \leqq \dfrac{1}{2}$ において,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4$$

が成り立つ．すると，(4) に対応する主張は,

$$\pi > 6\left[x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5\right]_0^{\frac{1}{2}} = 6 \times \frac{2009}{3840} = \underbrace{\frac{2009}{640}}_{3.1390625}$$

となる.

B **3**

$\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{11} + i\sin\dfrac{2\pi}{11}$, $\beta = \cos\dfrac{2\pi}{11} - i\sin\dfrac{2\pi}{11}$ とし,

$$A = \alpha+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^9, \quad B = \beta+\beta^3+\beta^4+\beta^5+\beta^9$$

とおく．ただし，i は虚数単位とする.

(1) $\alpha^{11} + \beta^{11}$ と $\alpha^2 - \beta^9$ の値をそれぞれ求めよ.
(2) $A + B$ の値を求めよ.
(3) AB の値を求めよ.
(4) $A - B$ の値を求めよ.　【2026 新潟大学】

解説　$|\alpha| = |\beta| = 1$ であり，$\beta = \overline{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$ である.
ド・モアブルの定理により，$\alpha^{11} = 1$ であり，$\beta^{11} = 1$.
また，当然 $\alpha \neq 1$ である.

(1)

$$\alpha^{11} + \beta^{11} = 1 + 1 = \mathbf{2}.$$

$$\alpha^2 - \beta^9 = \alpha^2 - \frac{1}{\alpha^9} = \frac{\alpha^{11}-1}{\alpha^9} = \frac{1-1}{\alpha^9} = \mathbf{0}.$$

(2) (1) より，$\alpha^2 = \beta^9$ とわかり，同様に,

$$\beta^1 = \alpha^{10}, \quad \beta^3 = \alpha^8, \quad \beta^4 = \alpha^7, \quad \beta^5 = \alpha^6$$

である．これより,

$$\begin{aligned} B &= \beta+\beta^3+\beta^4+\beta^5+\beta^9 \\ &= \alpha^{10}+\alpha^8+\alpha^7+\alpha^6+\alpha^2 \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} A+B &= \sum_{k=1}^{10}\alpha^k \\ &= \frac{\alpha(1-\alpha^{10})}{1-\alpha} = \frac{\alpha-\alpha^{11}}{1-\alpha} \\ &= \frac{\alpha-1}{1-\alpha} = \mathbf{-1}. \end{aligned}$$

(3) $\alpha\beta=1$ に注意すると，AB の展開は次の表のようになる．

$\times$	α	α^3	α^4	α^5	α^9
β	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{\alpha^2}$	$\boldsymbol{\alpha^3}$	$\boldsymbol{\alpha^4}$	$\boldsymbol{\alpha^8}$
β^3	$\boldsymbol{\beta^2}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha^2}$	$\boldsymbol{\alpha^6}$
β^4	$\boldsymbol{\beta^3}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha^5}$
β^5	$\boldsymbol{\beta^4}$	$\boldsymbol{\beta^2}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{\alpha^4}$
β^9	$\boldsymbol{\beta^8}$	$\boldsymbol{\beta^6}$	$\boldsymbol{\beta^5}$	$\boldsymbol{\beta^4}$	$\mathbf{1}$

さらに，

$$i+j=11 \quad\Longrightarrow\quad \beta^i=\alpha^j$$

に注意して，α のみで書き換えると次のようになる．

$\times$	α	α^3	α^4	α^5	α^9
β	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{\alpha^2}$	$\boldsymbol{\alpha^3}$	$\boldsymbol{\alpha^4}$	$\boldsymbol{\alpha^8}$
β^3	$\boldsymbol{\alpha^9}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha^2}$	$\boldsymbol{\alpha^6}$
β^4	$\boldsymbol{\alpha^8}$	$\boldsymbol{\alpha^{10}}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\alpha^5}$
β^5	$\boldsymbol{\alpha^7}$	$\boldsymbol{\alpha^9}$	$\boldsymbol{\alpha^{10}}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{\alpha^4}$
β^9	$\boldsymbol{\alpha^3}$	$\boldsymbol{\alpha^5}$	$\boldsymbol{\alpha^6}$	$\boldsymbol{\alpha^7}$	$\mathbf{1}$

これより，

$$AB = 5+2(A+B) = 5+2\cdot(-1) = \mathbf{3}.$$

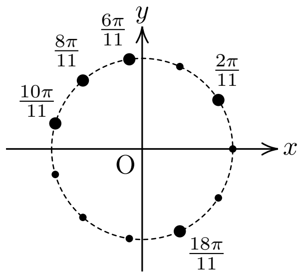
(4) $A+B=-1$，$AB=3$ であるから，

$$(A-B)^2 = (A+B)^2-4AB = -11.$$

ここで，$A-B$ の虚部は，

$$2\left(\sin\frac{2\pi}{11}+\sin\frac{6\pi}{11}+\sin\frac{8\pi}{11}+\sin\frac{10\pi}{11}+\sin\frac{18\pi}{11}\right)$$

である．



$$\sin\frac{2\pi}{11}>0,\quad \sin\frac{8\pi}{11}>0,\quad \sin\frac{10\pi}{11}>0$$

であり，

$$\sin\frac{6}{11}\pi+\sin\frac{18}{11}\pi = \sin\frac{5}{11}\pi-\sin\frac{4}{11}\pi.$$

ここで，

$$0<\frac{4}{11}\pi<\frac{5}{11}\pi<\frac{5.5}{11}\pi=\frac{1}{2}\pi$$

であるから，

$$\sin\frac{4}{11}\pi<\sin\frac{5}{11}\pi$$

ゆえ，

$$\sin\frac{5}{11}\pi-\sin\frac{4}{11}\pi>0.$$

よって，$A-B$ の虚部は正である (図形的に明らか)．

以上により，$A-B$ は $(A-B)^2=-11$ を満たす虚部が正の複素数であることから，

$$A-B = \boldsymbol{\sqrt{11}\,i}.$$

参考　本問には「ガウス和」と呼ばれる数学的構造が背景にある．(2)，(4) より，

$$A=\frac{-1+\sqrt{11}\,i}{2},\quad B=\frac{-1-\sqrt{11}\,i}{2}$$

であることがわかる．

B **4**

e を自然対数の底とする．$x>0$ の範囲で指数関数 $y=e^x$ と多項式関数 $y=x^n$ (n は自然数) を比較する．

(1) 自然数 n に対し，関数 $y=\dfrac{e^x}{x^n}$ $(x>0)$ の最小値 a_n とそのときの x の値を求めよ．また，$y=\dfrac{e^x}{x^n}$ のグラフが下に凸であることを示せ．

(2) 正の定数 a に対し，$x>0$ の範囲での関数 $y=e^x$ のグラフと関数 $y=ax^n$ のグラフの共有点の個数を求めよ．

(3) (1) で求めた a_n を用いて $f_n(x)=\dfrac{e^x}{a_nx^n}$ とおき，$f_n(x)=f_{n+1}(x)$ を満たす x を x_n とする．x_n を求めよ．

(4) (3) で求めた x_n に対して $n<x_n<n+1$ を示し，さらに不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ を証明せよ．　【2026 中央大学】

解説　$g(x)=\dfrac{e^x}{x^n}$ とおく．

(1)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^x \cdot x^n - e^x \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} \\ &= \frac{e^x x^{n-1}(x-n)}{x^{2n}} = \frac{e^x(x-n)}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

x	(0)	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{e^n}{n^n}$	$\nearrow$

これより，$g(x)$ は

$$x = \boldsymbol{n}$$

のときに最小値

$$a_n = g(n) = \boldsymbol{\frac{e^n}{n^n}}$$

をとる．さらに，

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{e^x(x-n+1)\cdot x^{n+1} - e^x(x-n)\cdot(n+1)x^n}{(x^{n+1})^2} \\ &= \frac{x^n e^x\{(x-n+1)\cdot x - (x-n)(n+1)\}}{x^{2n+2}} \\ &= \frac{e^x\{x^2 - 2nx + n^2 + n\}}{x^{n+2}} \\ &= \frac{e^x\{(x-n)^2 + n\}}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

より，$x>0$ において $g''(x)>0$ であるから，$y=g(x)$ のグラフは下に凸である． (証明終り)

(2) $x>0$ において

$$e^x = ax^n \iff \frac{e^x}{x^n} = a$$

であるから，$y=e^x$ $(x>0)$ と $y=ax^n$ $(x>0)$ の共有点は曲線 $y=g(x)$ $(x>0)$ と直線 $y=a$ との共有点の個数と一致する．

$$\lim_{x\to+0} g(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

および (1) での $g(x)$ の増減の解析により，求める個数は

a	$\cdots$	$\frac{e^n}{n^n}$	$\cdots$
個数	0	1	2

(3) $f_n(x) = \dfrac{n^n e^x}{e^n x^n}$ より，$x>0$ において，

$$\begin{aligned} f_n(x) = f_{n+1}(x) &\iff \frac{n^n e^x}{e^n x^n} = \frac{(n+1)^{n+1}e^x}{e^{n+1}x^{n+1}} \\ &\iff x = \frac{(n+1)^{n+1}}{en^n} \end{aligned}$$

であるから，

$$x_n = \boldsymbol{\frac{(n+1)^{n+1}}{en^n}}.$$

(4) $n < x_n < n+1$ すなわち

$$n < \frac{(n+1)^{n+1}}{en^n} < n+1 \qquad \cdots(*)$$

が成り立つことを証明しよう．

$$(*) \iff \log n < \log\frac{(n+1)^{n+1}}{en^n} < \log(n+1)$$

であり，

$$\log\frac{(n+1)^{n+1}}{en^n} = (n+1)\log(n+1) - n\log n - 1$$

であるから，

$$(*) \iff \frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}.$$

ここで，

$$\log(n+1) - \log n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx$$

であることに着目すると，$y=\dfrac{1}{x}$ が $x>0$ で単調減少であることから，

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{n}dx > \int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx > \int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}dx$$

すなわち

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx < \frac{1}{n}$$

の成立がわかる．これより，$(*)$ の成立が確認できた． (証明終り)

$(*)$ より，

$$\frac{1}{n+1} < \frac{en^n}{(n+1)^{n+1}} < \frac{1}{n}.$$

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} < e < \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}.$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}.$$

これより，不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

の成立がわかる． (証明終り)

参考　(4) の不等式は本編の p.97 で紹介したものである．

B **5**

n を 0 以上の整数とする．区間 $1 \leqq x \leqq \pi$ で定義された関数 $f_n(x) = \dfrac{\sin \dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$ および定積分 $I_n = \displaystyle\int_1^\pi f_n(x)dx$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 正の整数 k に対して $f_k(x) - f_{k-1}(x)$ を計算せよ．

(2) 正の整数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{k}$ を I_n を用いて表せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ．

(4) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k}$ の和を求めよ．

【2026 名古屋市立大学】

解説

(1) $k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$f_k(x) - f_{k-1}(x) = \frac{\sin\dfrac{2k+1}{2}x - \sin\dfrac{2(k-1)+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}} = \frac{\sin\left(kx + \dfrac{x}{2}\right) - \sin\left(kx - \dfrac{x}{2}\right)}{2\sin\dfrac{x}{2}}.$$

ここで，和積公式により，

$$\sin\left(kx+\frac{x}{2}\right) - \sin\left(kx-\frac{x}{2}\right) = 2\cos kx \sin\frac{x}{2}$$

であるから，

$$f_k(x) - f_{k-1}(x) = \frac{2\cos kx\sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2}} = \boldsymbol{\cos kx}.$$

(2) (1) より，正の整数 n に対して，

$$f_n(x) = f_0(x) + \sum_{k=1}^{n}\{f_k(x) - f_{k-1}(x)\} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx.$$

これより，

$$I_n = \int_1^\pi\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)dx = \frac{\pi-1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_1^\pi = \frac{\pi-1}{2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{k}$$

であるから，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{k} = \boldsymbol{\frac{\pi-1}{2} - I_n}.$$

(3) 部分積分により，

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2}\int_1^\pi \sin\left(nx+\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{x}{2}}dx \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{-\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)}{n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right]_1^\pi - \int_1^\pi\frac{-\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)}{n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}dx\right\} \\ &= \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)\sin\frac{1}{2}} + \frac{1}{2n+1}\int_1^\pi\frac{\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}dx. \end{aligned}$$

まず，$\dfrac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)\sin\frac{1}{2}}$ について，$M = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$ とおくと，

$$0 \leqq \left|\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)\sin\frac{1}{2}}\right| \leqq \frac{1}{2n+1}\cdot M$$

がすべての自然数 n で成り立ち，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\cdot M\right) = 0\cdot\frac{1}{\sin\frac{1}{2}} = 0$$

であるので，はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)\sin\frac{1}{2}}\right| = 0.$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)\sin\frac{1}{2}} = 0.$$

次に，$L = M^2$ とおくと，$1 \leqq x \leqq \pi$ において，

$$-L \leqq \frac{\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} \leqq L$$

が成り立つので，

$$-L(\pi-1) \leqq \int_1^\pi\frac{\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}dx \leqq L(\pi-1)$$

より，

$$-\frac{L(\pi-1)}{2n+1} \leqq \frac{1}{2n+1}\int_1^\pi\frac{\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}dx \leqq \frac{L(\pi-1)}{2n+1}.$$

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{L(\pi-1)}{2n+1}\right) = 0 = \lim_{n\to\infty}\frac{L(\pi-1)}{2n+1}$$

であるので，はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\int_1^\pi\frac{\cos\left(nx+\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}dx = 0.$$

これより，

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0 + 0 = \boldsymbol{0}.$$

(4) (2)，(3) により，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{k}=\frac{\pi-1}{2}-0=\boldsymbol{\frac{\pi-1}{2}}.$$

参考　リーマン・ルベーグの定理と呼ばれる定理がある．

Theorem (Riemann - Lebesgue)

$f(x)$ が $[a,\ b]$ で微分可能で $f'(x)$ が連続のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx=0.$$

リーマン・ルベーグの定理の意味　$\sin nx$ は周期 $\dfrac{2\pi}{n}$ の周期関数で，1 周期の間での積分は 0 である．n が大きくなると，$\sin nx$ の 1 周期の間では，連続関数 $f(x)$ の値はほとんど変化しないから，1 周期の間の $f(x)\sin nx$ の積分はほとんど 0 になるであろう．言い換えれば，n が大きくなると $\sin nx$ の激しい振動による打ち消し合いの結果，積分値が 0 に近づくと予想される．この予想は $f'(x)$ が連続という仮定のもとでは，以下のように部分積分によって確かめられる．リーマン・ルベーグの定理は $f(x)$ が連続という仮定だけで成り立つが，その証明は簡単ではない．

リーマン・ルベーグの定理の証明　部分積分により，

$$\int_a^b f(x)\sin nxdx=-\frac{1}{n}\Big[f(x)\cos nx\Big]_a^b+\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nxdx. \quad \cdots(*)$$

さて，$|f(x)|$，$|f'(x)|$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続だから，$[a,\ b]$ で最大値をとる．いま，$|f(x)|\leqq M$，$|f'(x)|\leqq M'$ としよう．このとき，$(*)$ の右辺の第 1 項の絶対値は $\dfrac{2M}{n}$ を超えないから，第 1 項は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する．

次に，$(*)$ 右辺の第 2 項の積分について，

$$\left|\int_a^b f'(x)\cos nxdx\right|\leqq\int_a^b |f'(x)\cos nx|dx\leqq M'(b-a)$$

が成り立つから，第 2 項も $n\to\infty$ のとき 0 に収束する．■

上の (3) での証明はこの Riemann - Lebesgue の定理の証明を真似たものである．

Coffee Break　n 個の正の実数 $x_1,\ \cdots,\ x_n$ の

$$\text{相加平均 } A_n=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

と

$$\text{相乗平均 } G_n=\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$$

の間には，大小関係

$$A_n\leqq G_n \quad \cdots\ \mathrm{P}(n)$$

が成り立つ．なお，等号成立は $x_1=\cdots=x_n$ の場合に限る．

ここでは，$P(2)$ を用いて $P(4)$ を証明し，$P(4)$ を用いて $P(3)$ を証明してみたい．

$P(2)\longrightarrow P(4)$ の証明　$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ に対し，

$$a=\frac{x_1+x_2}{2},\quad b=\frac{x_3+x_4}{2}$$

として，

$$\frac{\dfrac{x_1+x_2}{2}+\dfrac{x_3+x_4}{2}}{2}\geqq\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}} \quad \cdots①$$

が成り立つ．① での等号成立は

$$x_1+x_2=x_3+x_4 \quad \cdots①'$$

のときに限る．さらに，

$$\frac{x_1+x_2}{2}\geqq\sqrt{x_1x_2},\quad \frac{x_3+x_4}{2}\geqq\sqrt{x_3x_4}$$

であるので，

$$\sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}}\geqq\underbrace{\sqrt{\sqrt{x_1x_2}\cdot\sqrt{x_3x_4}}}_{\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}}. \quad \cdots②$$

② での等号成立は

$$x_1=x_2,\quad x_3=x_4 \quad \cdots②'$$

のときに限る．①，② により，

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\geqq\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$$

の成立がいえ，等号成立は，①$'$ かつ ②$'$ の場合，すなわち，$x_1=x_2=x_3=x_4$ の場合に限ることがわかる．■

$P(4)\longrightarrow P(3)$ の証明　$\dfrac{a+b+c+d}{4}\geqq\sqrt[4]{abcd}$ に対し，

$$a=x_1,\quad b=x_2,\quad c=x_3,\quad d=\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

として，

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\sqrt[3]{x_1x_2x_3}}{4}\geqq\underbrace{\sqrt[4]{x_1x_2x_3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}}}_{\sqrt[3]{x_1x_2x_3}}$$

すなわち

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\geqq\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

が成り立つ．等号成立は，

$$x_1=x_2=x_3=\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$

すなわち，$x_1=x_2=x_3$ のときに限り成り立つ．■