センター直後　数 III 強化ドリル　PART I （基本に忠実にやる計算問題）

【1】 $n$ を自然数とする．次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}\sin\frac{2\pi}{n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^n$

【2】 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^6+(2n+2)^6+\cdots+(3n)^6}{n^7}$ を計算せよ．

【3】 $x$ を実数とする．次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-2x)\cos 3x}{\cos^2 x}$

【4】 $n$ は自然数とする．$xy$ 平面において 2 曲線 $y=\dfrac{1}{x}$，$y=ax(1-x)^{2n}$ はその共有点の 1 つにおいて共通の接線をもつ．

(1) $a$ を $n$ で表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n^2}$ を求めよ．

【5】 $x=\sin t$，$y=2^t$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ．

【6】 曲線 $C: x=3\cos\theta,\ y=2\sin\theta$（$\theta$ は媒介変数）の点 $(3\cos\alpha,\ 2\sin\alpha)$ における法線の方程式を求めよ．(「傾き」を用いずに求めよ)

【7】 関数 $f(\theta)=\dfrac{4\sin\theta}{7+\cos\theta}$ （$0<\theta<\pi$）の最大値を求めよ．

【8】 関数 $f(t)=\dfrac{\left(t^2-2t+\dfrac{25}{2}\right)^5}{t^2+1}$ が最小値をとるときの $t$ の値を求めよ．

【9】 関数 $f(x)=x^2\sqrt{4\pi^2-x^2}$ の最大値を求めよ．

【10】(1) 次の関数の導関数を求めよ．

i. $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$　　ii. $x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

(2) 次の関数の原始関数を求めよ．

i. $\sqrt{x^2+1}$　　ii. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

【11】次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \tan x dx$　　(2) $\displaystyle\int \tan^2 x dx$　　(3) $\displaystyle\int \tan^3 x dx$

【12】定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{x^2-2x+2}dx$ の値を求めよ．

【13】関数 $f(x)$ を $f(x)=\displaystyle\int_0^1 t|x-2t|dt$ で定めるとき，$y=f(x)$ のグラフを描け．

【14】 $xy$ 平面上の曲線

$$x=e^{-t}\cos t,\quad y=e^{-t}\sin t\quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と $x$ 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ．

【15】 $(1+\sqrt{3}i)^{10}$ を計算せよ．ただし $i$ は虚数単位である．

【16】方程式 $z^3=i$ を解け．ただし $i$ は虚数単位である．

【17】座標平面上で 8 点 A，B，C，D，E，F，G，H がこの順で反時計回りに並んで正 8 角形の頂点とし，A$(1,1)$，B$(3,0)$ であるとき，点 C，D の座標を求めよ．

【18】次の方程式で表される曲線を $xy$ 平面に図示せよ．

(1) $2x^2+3y^2-4x-6y=0$　　(2) $2x^2-3y^2-4x-6y=0$

【19】双曲線 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）について，$C$ 上の点 P$(x_1,\ y_1)$ における接線が $C$ の 2 つの漸近線と交わる点を Q，R とする．

(1)　Q，R の座標を求めよ．

(2) 原点を O とするとき，三角形 OQR の面積は P によらず一定であることを示し，その面積を求めよ．