# 数IIIドリルA　の解答例

【1】(1)

$-1 \leqq \sin 3n \leqq 1$ より $-\dfrac{1}{2n} \leqq \dfrac{\sin 3n}{2n} \leqq \dfrac{1}{2n}$.

$n \to \infty$ のとき $-\dfrac{1}{2n} \to 0$, $\dfrac{1}{2n} \to 0$ だから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 3n}{2n} = \underline{0}$$

(2)

$$\sin\frac{2}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}} \times \frac{\sin\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}} = \frac{2}{n} \times \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \times \frac{\sin\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}}$$

$$\therefore\ n\sin\frac{2}{\sqrt{n^2+1}} = 2 \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}}_{\to 1} \times \underbrace{\frac{\sin\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}}}_{\to 1} \longrightarrow 2$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2}{\sqrt{n^2+1}} = \underline{2}$$

(3)

(way1)

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^n = \left\{\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-2}}\right\}^{\frac{-2}{n+1}\cdot n} = \left\{\underbrace{\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-2}}}_{\to e}\right\}^{\underbrace{\frac{-2}{1+\frac{1}{n}}}_{\to -2}}$$

これより

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = e^{-2} = \underline{\frac{1}{e^2}}.$$

(way2)

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left\{\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\}^2\cdot\left(1+\frac{2}{n-1}\right)}$$

$$\therefore\ \log\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = -\left\{2\log\underbrace{\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}}_{\to e} + \log\underbrace{\left(1+\frac{2}{n-1}\right)}_{\to 1}\right\}$$

$$\xrightarrow[(n\to\infty)]{} -2 = \log e^{-2}$$

これより

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = e^{-2} = \underline{\frac{1}{e^2}}.$$

【2】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^6+(2n+2)^6+\cdots+(3n)^6}{n^7}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n+k)^6}{n^7}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^6$$

$$= \int_0^1 (2+x)^6\,dx$$

$$= \frac{1}{7}(3^7-2^7)$$

$$= \underline{\frac{2059}{7}}$$

【3】(1)

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\times\left(\frac{x}{2}\times\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}x^2\times\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$

これより, $x\to 0$ のとき

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\times\underbrace{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}_{\to 1} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \underline{\frac{1}{2}}$$

(2)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-2x)\cos 3x}{\cos^2 x}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-2t\cos\left(3t+\frac{3\pi}{2}\right)}{\cos^2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} \quad \left(x-\frac{\pi}{2}=t \text{ とおいた}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-2t\sin 3t}{\sin^2 t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-2\cancel{t}\times\left(3\cancel{t}\times\frac{\sin 3t}{3t}\right)}{\left(\cancel{t}\times\frac{\sin t}{t}\right)^2}$$

$$= \frac{-2\times(3\times 1)}{1^2}$$

$$= \underline{-6}$$

【4】

2曲線 $y=\dfrac{1}{x}$, $y=ax(1-x)^{2n}$ について, それぞれ

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y' = a(1-x)^{2n} + ax\cdot 2n(1-x)^{2n-1}\cdot(-1)$$

$$= a(1-x)^{2n}\left(1-\frac{2nx}{1-x}\right)$$

共有点の $x$ 座標を $t$ とすると,

$$\begin{cases} y\text{が一致することから} & \dfrac{1}{t} = at(1-t)^{2n} \quad \cdots\cdots ① \\ y'\text{が一致することから} & -\dfrac{1}{t^2} = a(1-t)^{2n}\left(1-\dfrac{2nt}{1-t}\right) \quad \cdots ② \end{cases}$$

(1) ①より, $a = \dfrac{1}{t^2(1-t)^{2n}}$ ……………………③

であり, ②に代入して

$$-\frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2(1-t)^{2n}}\cdot(1-t)^{2n}\left(1-\frac{2nt}{1-t}\right)$$

$$\therefore\ -1 = 1-\frac{2nt}{1-t}$$

$$\therefore\ \frac{2nt}{1-t} = 2$$

$$\therefore\ nt = 1-t$$

$$\therefore\ t = \frac{1}{n+1}$$

③に代入して

$$a = \frac{1}{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}}$$

$$= \underline{(n+1)^2\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^2$$

$$= 1\cdot e^2$$

$$= \underline{e^2}$$

【5】 $0 \leqq x \leqq 1$ において $e^0 \leqq e^x \leqq e^1$ より

$$0 \leqq e^x \leqq e.$$

$$\therefore\ 0 \leqq e^x x^n \leqq e x^n$$

これより,

$$\int_0^1 0\,dx \leqq \int_0^1 e^x x^n dx \leqq \int_0^1 e x^n dx.$$

$$\therefore\ 0 \leqq \int_0^1 e^x x^n dx \leqq \frac{e}{n+1}$$

$n \to \infty$ のとき $\frac{e}{n+1} \to 0$ だから

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^x x^n dx = \underline{0}$$

【6】 各実数 $a$ に対し,
関数 $f(x)=x^n$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{(\cancel{{}_nC_0 a^n} + {}_nC_1 a^{n-1}h + {}_nC_2 a^{n-2}h^2 + \cdots + {}_nC_n h^n) - \cancel{a^n}\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}({}_nC_1 a^{n-1}h + {}_nC_2 a^{n-2}h^2 + \cdots + {}_nC_n h^n) \\
&= \lim_{h\to 0}({}_nC_1 a^{n-1} + \underbrace{{}_nC_2 a^{n-2}h + \cdots + {}_nC_n h^{n-1}}_{n-1\text{個の項がどれも }h\to 0\text{ のとき }0\text{ に収束}}) \\
&\quad (\text{↑}h\text{によらない定数}) \\
&= {}_nC_1 a^{n-1} \\
&= n a^{n-1}.
\end{aligned}$$

これが どの $a$ に対しても言えるので, 導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = n x^{n-1}.$$

【7】 $f'(x) > 0$ である $x$ の区間においては
$f'(x)$ の存在 より $f(x)$ は 微分可能 である.

この区間に属する任意の 2数 $a, b$ $(a<b)$ に対して
平均値の定理より, $a<c<b$ なる $c$ をうまくとって

$$f(b) - f(a) = (b-a) \times f'(c)$$

とできる.

設定より $b-a>0$, $f'(c)>0$ だから

$$f(b) - f(a) > 0.$$

これ より, 命題

「$a<b \Rightarrow f(a)<f(b)$」

が成り立つので, $f(x)$ は 単調増加 である.

【8】 両辺を $x$ の関数とみると,
等式 $x = \cos y$ は $x$ の恒等式 であり
両辺の 導関数 も 一致するから

$$1 = -\sin y \times \frac{dy}{dx}. \qquad \therefore\ \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y}$$

一方, $0<y<\pi$ より $\sin y > 0$ だから

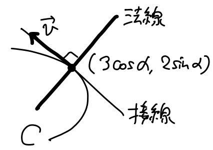
$$\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

よって,

$$\underline{\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

【9】

(way 1)




速度ベクトル $\vec{v_\theta} = (-3\sin\theta, 2\cos\theta)$ が
法線の 法線ベクトル となる.

これより, 求める法線は
点 $(3\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ を通り,
$\vec{v_\alpha} = (-3\sin\alpha, 2\cos\alpha)$ を法線ベクトルにもつ 直線
だから, その方程式は

$$-3\sin\alpha\ (x - 3\cos\alpha) + 2\cos\alpha\ (y - 2\sin\alpha) = 0.$$

$$\therefore\ \underline{(-3\sin\alpha)x + (2\cos\alpha)y + 5\sin\alpha\cos\alpha = 0}$$

(way 2)

曲線 C は 楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ であるから
点 $(3\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ における 接線は

$$\frac{3\cos\alpha}{9}x + \frac{2\sin\alpha}{4}y = 1 \qquad \therefore\ \frac{\cos\alpha}{3}x + \frac{\sin\alpha}{2}y = 1$$

求める直線は これに直交し 点 $(3\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ を通るから,
その方程式は

$$-\frac{\sin\alpha}{2}(x - 3\cos\alpha) + \frac{\cos\alpha}{3}(y - 2\sin\alpha) = 0.$$

$$\therefore\ \underline{(-3\sin\alpha)x + (2\cos\alpha)y + 5\sin\alpha\cos\alpha = 0}$$

【10】 $x = 2^t$, $y = \log t$, $z = \frac{dy}{dx}$ とおくと

$$\begin{cases} x' = (\log 2)\, 2^t \\ y' = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\therefore\ z = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{\frac{1}{t}}{(\log 2)\, 2^t} = \frac{1}{(\log 2)\, t \cdot 2^t}$$

これより,

$$z' = \frac{1}{\log 2} \cdot \left[ -\frac{1}{(t\cdot 2^t)^2} \cdot \{1\cdot 2^t + t\cdot(\log 2) 2^t\} \right] = -\frac{2^t\{1+(\log 2)t\}}{(\log 2)(t\cdot 2^t)^2}$$

よって,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{z'}{x'} = \frac{-\frac{2^t\{1+(\log 2)t\}}{(\log 2)(t\cdot 2^t)^2}}{(\log 2)\, 2^t} = \underline{-\frac{1+(\log 2)t}{\{(\log 2)\, t\cdot 2^t\}^2}}$$

【11】

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2} \\
&= \sqrt{4\pi^2 x^4 - x^6}
\end{aligned}$$

において, $x^2 = t$ とおき, $\sqrt{\ }$ の中身を $g(t)$ とおくと

$$\begin{aligned}
g(t) &= 4\pi^2 t^2 - t^3 \quad (t \geqq 0) \\
g'(t) &= 8\pi^2 t - 3t^2 \\
&= 3t\left(\frac{8\pi^2}{3} - t\right)
\end{aligned}$$

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{8\pi^2}{3}$ | $\cdots$ | $(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $+$ | | $-$ | |
| $g(t)$ | | ↗ | | ↘ | |

$f(x)$ が最大となるのは $g(t)$ が最大のときであり,
表より それは $t = \frac{8\pi^2}{3}$ のときである.

よって,

$$\begin{aligned}
(f(x)\text{の最大値}) &= \sqrt{g\left(\frac{8\pi^2}{3}\right)} \\
&= \sqrt{4\pi^2\left(\frac{8\pi^2}{3}\right)^2 - \left(\frac{8\pi^2}{3}\right)^3} \\
&= \frac{8\pi^2}{3}\sqrt{4\pi^2 - \frac{8\pi^2}{3}} \\
&= \underline{\frac{16}{3\sqrt{3}}\pi^3}
\end{aligned}$$

【12】

(1) i

$$\left\{\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right\}' = \frac{1+\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\cancel{2}x}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

ii

$$\left\{x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right\}'$$

$$= 1\cdot\sqrt{x^2+1} + x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\cancel{2}x + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}_{\text{(i)より}}$$

$$= \frac{x^2+1+x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = 2\sqrt{x^2+1}$$

(2) i (1)の(ii)より

$$\frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right\} \xmapsto{\text{微分}} \sqrt{x^2+1}$$

なので,

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+1}+\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right\}+C$$

(Cは積分定数)

ii (1)の(i)より

$$\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \xmapsto{\text{微分}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

なので,

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$$

(Cは積分定数)

【13】

(1)

$$\int\tan x\,dx = -\int\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)\,dx = -\log|\cos x|+C$$

(Cは積分定数)

(2)

$$\int\tan^2 x\,dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \tan x - x + C$$

(Cは積分定数)

(3)

$$\int\tan^3 x\,dx = \int\tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \int\left(\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} - \underbrace{\tan x}_{\text{(1)を用いる}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \log|\cos x| + C$$

(Cは積分定数)

【14】

$$\int_1^2\frac{x^3}{x^2-2x+2}\,dx = \int_1^2\left(x+2+\frac{2x-4}{x^2-2x+2}\right)dx$$

$$= \int_1^2\left\{x+2+\frac{2x-2}{x^2-2x+2} - \underbrace{\frac{2}{(x-1)^2+1}}\right\}dx$$

$\left(x-1=\tan\theta,\ \begin{array}{c|c} x & 1\to 2 \\ \hline \theta & 0\to\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$ により変数を変換する.
$\left. dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}\right)$

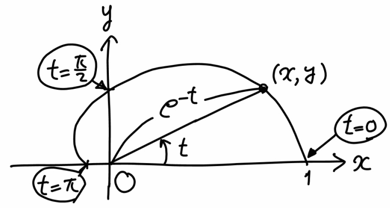
$$= \left[\frac{1}{2}x^2+2x+\log|x^2-2x+2|\right]_1^2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\cancel{\tan^2\theta+1}}\cdot\frac{d\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{7}{2}+\log 2-\frac{\pi}{2}$$

【15】

$$\begin{cases} x = e^{-t}\cos t & (= x(t)\text{とおく}) \\ y = e^{-t}\sin t & (= y(t)\text{とおく})\end{cases} \quad (0\leqq t\leqq\pi)$$

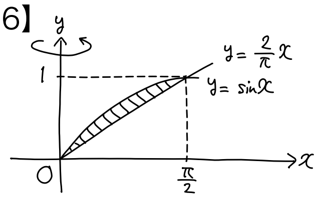
$(x, y) = e^{-t}(\cos t, \sin t)$ より, 概形は次のとおり.




$r = e^{-t}$ とおくと, $(x, y) = r(\cos t, \sin t)$ であり,
求める面積 $S$ は

$$S = \int_0^\pi\frac{1}{2}r^2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-2t}\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^\pi = \frac{1-e^{-2\pi}}{4}$$

【16】




求める左図の回転体の体積を $V$ とおく.

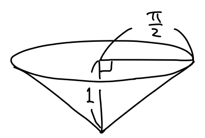



図1

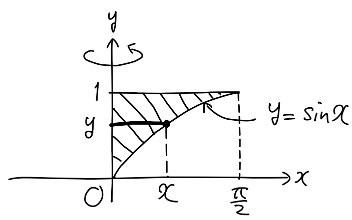



図2

$V$ は図1の円錐から図2の回転体をとり除いた部分の体積だから,

$$V = \frac{1}{3}\times\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\times 1 - \underbrace{\int_0^1\pi x^2\,dy}$$

$\left(\begin{array}{l} y=\sin x, \\ dy=\cos x\,dx\end{array}\ \begin{array}{c|c} y & 0\to 1 \\ \hline x & 0\to\frac{\pi}{2}\end{array}\right)$

$$= \frac{\pi^3}{12} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi x^2\cos x\,dx$$

$$= \frac{\pi^3}{12} - \pi\left[x^2\sin x - 2x(-\cos x) + 2(-\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi^3}{12} - \pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$$

$$= 2\pi - \frac{\pi^3}{6}$$

【17】
$$\begin{cases} f(x) = \int_0^x \{g(t) + t\cos t\}\,dt + \sin x & \cdots ① \\ g(x) = \sin x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f'(t) - \cos t\}\,dt & \cdots ② \end{cases}$$

②より $g(x) = \sin x + k$ ---------------- ③

と表せる. ただし,

$$k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f'(t) - \cos t\}\,dt \quad \text{------------} ④$$

③を①に代入して

$$f(x) = \int_0^x (\sin t + k + t\cos t)\,dt + \sin x$$
$$= \Big[-\cos t + kt + t\sin t + \cos t\Big]_0^x + \sin x$$
$$= kx + x\sin x + \sin x$$

$\therefore f(x) = kx + (x+1)\sin x$ ------------ ⑤

$f'(x) = k + \sin x + (x+1)\cos x$

これより,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f'(t) - \cos t\}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{k + \sin t + (t+1)\cos t - \cos t\}dt$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (k + \sin t + t\cos t)\,dt$$
$$= k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \quad \left(\sin t,\ t\cos t \text{ は奇関数より}\right)$$
$$= \pi k$$

これと④より $k = \pi k$. $\therefore (\pi+1)k = 0$ $\therefore k = 0$

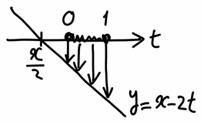
⑤, ③に代入して,

$f(x) = (x+1)\sin x$, $g(x) = \sin x$ //.

【18】

$f(x) = \int_0^1 t|x-2t|\,dt$ について

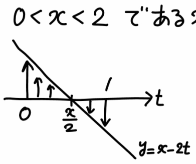
(ア) $x \leqq 0$ である $x$ に対しては




$0 \leqq t \leqq 1$ でつねに $x - 2t \leqq 0$ なので

$$f(x) = \int_0^1 t(2t - x)\,dt$$
$$= \int_0^1 (2t^2 - xt)\,dt$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x.$$

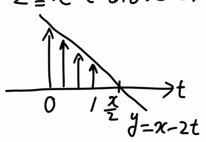
(イ) $0 < x < 2$ である $x$ に対しては




$\begin{cases} 0 \leqq t \leqq \frac{x}{2} \text{ において } x - 2t \leqq 0 \\ \frac{x}{2} \leqq t \leqq 1 \text{ において } x - 2t \leqq 0 \end{cases}$ なので

$$f(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} t(x-2t)\,dt + \int_{\frac{x}{2}}^1 t(2t - x)\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{x}{2}} (xt - 2t^2)\,dt + \int_{\frac{x}{2}}^1 (2t^2 - xt)\,dt$$
$$= \frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{2}{3}\left\{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^3\right\} - \frac{x}{2}\left\{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right\}$$
$$= \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$$

(ウ) $2 \leqq x$ である $x$ に対しては




$0 \leqq t \leqq 1$ でつねに $x - 2t \geqq 0$ なので

$$f(x) = \int_0^1 t(x - 2t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}.$$

これより,

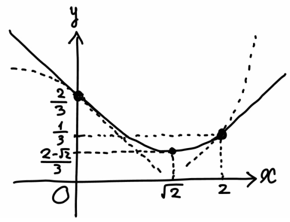
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{1}{2}x & (\text{if } x \leqq 0) \\ \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{2}{3} & (\text{if } 0 < x < 2) \\ \frac{1}{2}x - \frac{2}{3} & (\text{if } 2 \leqq x) \end{cases}$$

ここで, $0 < x < 2$ においては

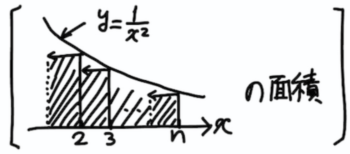
$$f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - 2)$$

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\sqrt{2}$ | $\cdots$ | $(2)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $\left(\frac{2}{3}\right)$ | $\searrow$ | $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$ | $\nearrow$ | $\left(\frac{1}{3}\right)$ |

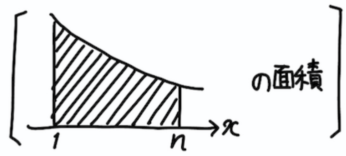
よって, $y = f(x)$ のグラフは次のとおり.




【19】

$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} =$  の面積



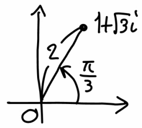
$\left(y = \frac{1}{x^2} \text{ が } x > 0 \text{ において単調減少より}\right) <$  の面積



$$= \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n$$
$$= 1 - \frac{1}{n}$$
$$< 1 \ //$$

【20】

$$(1+\sqrt{3}i)^{10}$$
$$= \left\{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{10}$$
$$= 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$
$$= 2^{10}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= \underline{-512-512\sqrt{3}\,i}\ //$$




【21】

（解1） $z=x+yi$ （$x, y$ は実数）とおくと

$$(x+yi)^3=i$$
$$\therefore\ x(x^2-3y^2)+i(3x^2y-y^3)=i$$

両辺の実部，虚部を比べて

$$\begin{cases} x(x^2-3y^2)=0 \\ 3x^2y-y^3=1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=0 \\ -y^3=1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x=\pm\sqrt{3}y \\ y^3=\frac{1}{8} \end{cases}$$

$y$ が実数であることに注意して解くと

$$(x, y)=(0,-1),\ \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

よって，

$$\underline{z=-i,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}\ //$$

（解2） $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ （$r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi$）とおくと

$$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^3=i$$
$$\therefore\ r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

両辺の絶対値と偏角を比べて

$$r^3=1,\quad 3\theta=\frac{\pi}{2}+2n\pi\ \ (n\text{は整数})$$

$r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi$ に注意して解くと

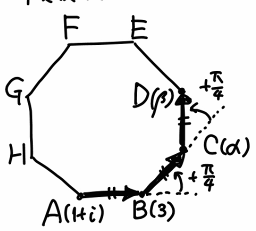
$$r=1,\quad \theta=\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$$

よって，

$$z=1\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),\ 1\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right),\ 1\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$= \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ -i}\ //$$

【22】

複素数平面で考える．




$\overrightarrow{BC}$ は $\overrightarrow{AB}$ を $+\frac{\pi}{4}$ だけ回転したものだから，$C$ を表す複素数を $\alpha$ とおくと

$$\alpha-3=\{3-(1+i)\}\times 1\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\therefore\ \alpha=3+(2-i)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$=3+\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

よって， $\underline{C\left(3+\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ //

$\overrightarrow{CD}$ は $\overrightarrow{AB}$ を $+\frac{\pi}{2}$ だけ回転したものだから，$D$ を表す複素数を $\beta$ とおくと

$$\beta-\alpha=\{3-(1+i)\}\times 1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\therefore\ \beta=\alpha+(2-i)i$$
$$=4+\frac{3}{\sqrt{2}}+\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i$$

よって， $\underline{D\left(4+\frac{3}{\sqrt{2}}, 2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$ //

【23】

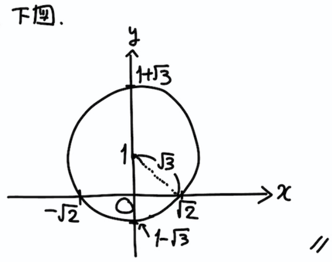
等式 $z\bar{z}+iz-i\bar{z}=2$ …① を同値変形すると，

$$① \iff (z-i)(\bar{z}+i)=2-i^2$$
$$\iff (z-i)\overline{(z-i)}=3$$
$$\iff |z-i|^2=3$$
$$\iff |z-i|=\sqrt{3}.$$

これより，点 $z$ の全体は

点 $i$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円

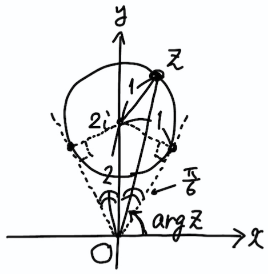
であり，下図．




//

【24】

点 $z$ は，点 $2i$ を中心とする半径 1 の円を動く．




図から，$\arg z$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\leqq z\leqq\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}.$$
$$\therefore\ \underline{\frac{\pi}{3}\leqq z\leqq\frac{2\pi}{3}}\ //$$

【25】

$w=\dfrac{2z}{z-1}$ を同値変形すると

$$w=\frac{2z}{z-1} \iff w(z-1)=2z$$
$$\iff (w-2)z=w$$
$$\iff z=\frac{w}{w-2}.$$

点 $z$ が $|z|=1$ を満たしながら変化することから，点 $w$ は

$$\left|\frac{w}{w-2}\right|=1 \quad \text{------ ①}$$

を満たしながら変化する．

①を同値変形すると，

$$① \iff |w|=|w-2|$$

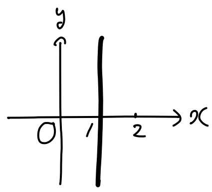
$\iff$「点 $w$ は 2点 0, 2 からの距離が等しい」

$\iff$「点 $w$ は 2点 0, 2 を結ぶ線分の垂直二等分線上にある」．

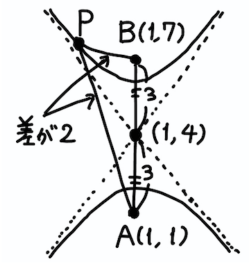
よって，点 $w$ の軌跡は

2点 0, 2 を結ぶ線分の垂直二等分線

であり，右図．



【26】




Pの軌跡は A, Bを焦点とする双曲線であり, ABの中点 (1, 4)を中心にもつので

$$\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{(y-4)^2}{b^2}=-1 \quad (a>0,\ b>0)$$

と表せる.

さらに, PAとPBの差が 2 より

$2b=2. \quad \therefore b=1$ ……①

また, 中心から焦点までの距離が 3 より

$\sqrt{a^2+b^2}=3.$ ……②

①,② と $a>0$ より

$a=2\sqrt{2},\ b=1$

であり, Pの軌跡は

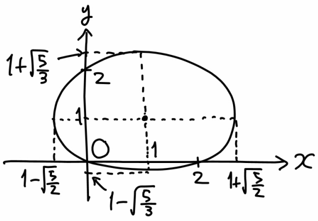
双曲線 $\dfrac{(x-1)^2}{8}-(y-4)^2=-1$ //

【27】

(1) $2x^2+3y^2-4x-6y=0$

$\therefore 2(x-1)^2+3(y-1)^2=5$

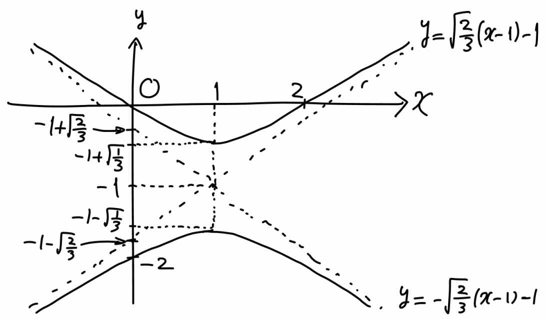
$\therefore \dfrac{(x-1)^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2}+\dfrac{(y-1)^2}{\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^3}=1$ (楕円)




(2) $2x^2-3y^2-4x-6y=0$

$\therefore 2(x-1)^2-3(y+1)^2=-1$ (双曲線)

$\left(\{\sqrt{2}(x-1)-\sqrt{3}(y+1)\}\{\sqrt{2}(x-1)+\sqrt{3}(y+1)\}=-1\right)$




【28】

(1) (way1)

平面全体を $x$ 方向に $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍に拡大して考えると,

楕円 $C$: $\dfrac{x^2}{2}+y^2=3 \longmapsto$ 円 $C'$: $x^2+y^2=3$

直線 $l$: $y=-\frac{1}{2}x+k \longmapsto$ 直線 $l'$: $y=-\frac{1}{2}\sqrt{2}x+k$

にそれぞれうつる.

$C'$と$l'$が接するように $k$ を定めればよく, その条件は

$$\begin{pmatrix} C'\text{の中心 }(0,0)\text{ と} \\ l': \frac{1}{\sqrt{2}}x+y-k=0\text{ の距離} \end{pmatrix} = (C'\text{の半径})$$

だから,

$$\frac{|-k|}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}}=\sqrt{3}. \quad \therefore |k|=\frac{3}{\sqrt{2}} \quad \therefore k=\pm\frac{3}{\sqrt{2}} //$$

(way2)

$C$と$l$が ただ1つの共有点をもつように $k$を定めればよい.

連立して $y$を消去すると,

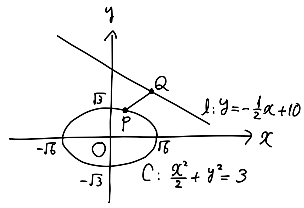
$$\frac{x^2}{2}+\left(-\frac{1}{2}x+k\right)^2=3. \quad \therefore \frac{3}{4}x^2-kx+k^2-3=0$$

これを満たす実数 $x$ が ただ1つ (重解) となる条件を考えて,

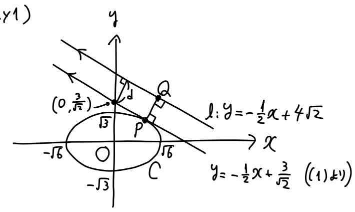
(判別式)$=0$ より

$$k^2-3(k^2-3)=0. \quad \therefore k^2=\frac{9}{2} \quad \therefore k=\pm\frac{3}{\sqrt{2}} //$$

(2)




(way1)




PQの最小値は 上図の 2直線の距離 つまり

点$(0, \frac{3}{\sqrt{2}})$ と $l$: $x+2y-8\sqrt{2}=0$ の 距離 $d$

であり,

$$d=\frac{\left|0+2\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}-8\sqrt{2}\right|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{10}.$$

だから

(PQの最小値) $=\sqrt{10}$ //.

(way2)

$C$ 上の点 P は実数全体を変域とするパラメータ $\theta$ を用いて

P$(\sqrt{6}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$ と表せる.

P を固定するごとに Q が $l$ 上を動くときの PQの最小値を

$d(\theta)$ とおくと,

$$d(\theta)=\begin{pmatrix} \text{P}(\sqrt{6}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)\text{ と} \\ l: x+2y-8\sqrt{2}=0\text{ の 距離} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{|\sqrt{6}\cos\theta+2\cdot\sqrt{3}\sin\theta-8\sqrt{2}|}{\sqrt{1+4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|3\sqrt{2}\sin(\theta+\alpha)-8\sqrt{2}\right| \quad (\alpha: \text{ある定数})$$

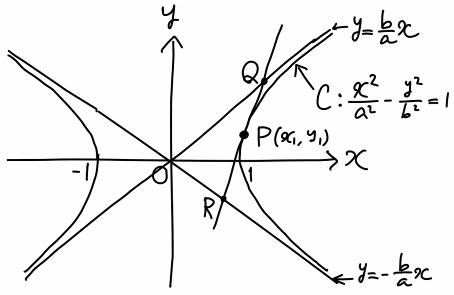
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\{8\sqrt{2}-3\sqrt{2}\sin(\theta+\alpha)\}.$$

$d(\theta)$の 最小値は $\frac{1}{\sqrt{5}}(8\sqrt{2}-3\sqrt{2})=\sqrt{10}$.

よって,

(PQの最小値) $=\sqrt{10}$ //.

【29】




(1) Pにおける接線の式 $\frac{x_1}{a^2}x-\frac{y_1}{b^2}y=1$ と

漸近線の式 $y=\pm\frac{b}{a}x$（以下，複号同順）を連立すると，

$$\begin{cases} y=\pm\frac{b}{a}x & \cdots\cdots ① \\ \left(\frac{x_1}{a^2}\mp\frac{y_1}{ab}\right)x=1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

ここで，$P\in C$ より

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

$$\therefore \left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right)\left(\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}\right)=1 \quad \cdots\cdots ③$$

②の両辺に $a\left(\frac{x_1}{a}\pm\frac{y_1}{b}\right)$ をかけて③を用いると

$$x=a\left(\frac{x_1}{a}\pm\frac{y_1}{b}\right).$$

①に代入して，

$$y=b\left(\pm\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right).$$

よって，Q，Rの座標は

$\left(a\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right), b\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right)\right), \left(a\left(\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}\right), -b\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right)\right)$ //

(2) （△OQRの面積）

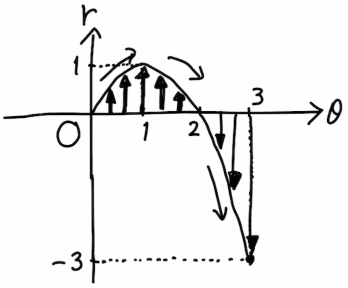
$=\frac{1}{2}\left|(Qのx座標)\times(Rのy座標)-(Qのy座標)\times(Rのx座標)\right|$

$=\frac{1}{2}\left|a\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right)\cdot\left\{-b\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right)\right\}-b\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right)\cdot a\left(\frac{x_1}{a}-\frac{y_1}{b}\right)\right|$

$=\frac{1}{2}\left|-ab-ab\right|$ （③より）

$=ab$ （$a>0, b>0$ より） //

【30】 一旦 θr 直交座標に図示すると次のとおり．




これより，図形の概形は次のとおり．