

..... 極限 .....

1  $n$  を自然数とする。次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 3n}{2n} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{2}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^n$$

2 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^6 + (2n+2)^6 + \cdots + (3n)^6}{n^7}$$

3  $x$  を実数とする。次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - 2x) \cos 3x}{\cos^2 x}$$

4  $n$  は自然数とする。 $xy$  平面において 2 曲線  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = ax(1-x)^{2n}$  はその共有点の 1 つにおいて共通の接線をもつ。

- (1)  $a$  を  $n$  で表せ。  
 (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n^2}$  を求めよ。

5 自然数  $n$  に対して、次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^x x^n dx$$

## .....微分.....

6 自然数  $n$  に対し, 関数  $x^n$  の導関数は  $nx^{n-1}$  で与えられることを示せ。

7  $f'(x) > 0$  である  $x$  の区間において  $f(x)$  は単調増加であることを示せ。

8  $x = \cos y$  ( $0 < y < \pi$ ) を満たす 2 変数  $x, y$  に対して,  $\frac{dy}{dx}$  を  $x$  で表せ。

9 曲線  $C: x = 3 \cos \theta, y = 2 \sin \theta$  ( $\theta$  は媒介変数) の点  $(3 \cos \alpha, 2 \sin \alpha)$  における法線の方程式を求めよ。(傾き  $\frac{dy}{dx}$  を用いずに 2 通りの方法を考えよ。)

10 パラメータ表示  $x = 2^t, y = \log t$  で表される  $x, y$  について,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  を  $t$  で表せ。

11 関数  $f(x) = x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}$  の最大値を求めよ。

12 (1) 次の関数の導関数を求めよ。

i.  $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

ii.  $x\sqrt{x^2 + 1} + \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$

(2) 次の関数の原始関数を求めよ。

i.  $\sqrt{x^2 + 1}$

ii.  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

.....積分.....

13 次の不定積分を求めよ。

(1)  $\int \tan x dx$

(2)  $\int \tan^2 x dx$

(3)  $\int \tan^3 x dx$

14 定積分  $\int_1^2 \frac{x^3}{x^2 - 2x + 2} dx$  の値を求めよ。

15  $xy$  平面上の曲線

$$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

と  $x$  軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。

16 領域  $0 \leq x \leq \frac{2}{\pi}x \leq y \leq \sin x$  を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

17 次の関係式を満たす関数  $f(x)$  と  $g(x)$  を求めよ。

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^x \{g(t) + t \cos t\} dt + \sin x, \\ g(x) = \sin x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f'(t) - \cos t\} dt \end{cases}$$

18 関数  $f(x)$  を  $f(x) = \int_0^1 t|x - 2t|dt$  で定めるとき、 $y = f(x)$  のグラフを描け。

19 自然数  $n$  に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1$$

## ..... 複素数平面 .....

20  $(1 + \sqrt{3}i)^{10}$  を計算せよ。ただし  $i$  は虚数単位である。

21 方程式  $z^3 = i$  を解け。ただし  $i$  は虚数単位である。

22 座標平面上で 8 点 A, B, C, D, E, F, G, H がこの順で反時計回りに並んで正 8 角形の頂点とし, A(1,1), B(3,0) であるとき, 点 C, D の座標を求めよ。

23  $z\bar{z} + iz - i\bar{z} = 2$  を満たす点  $z$  の全体を複素数平面上に図示せよ。

24 複素数  $z$  が  $|z - 2i| = 1$  を満たしながら変化するとき,  $\arg z$  のとり得る値の範囲を求めよ。ただし,  $0 \leq \arg z < 2\pi$  とする。

25 複素数  $z$  が単位円上の  $z \neq 1$  である部分を動くとき,  $w = \frac{2z}{z-1}$  で定まる複素数  $w$  の描く軌跡を図示せよ。

.....いろいろな曲線.....

**26** 2点 A(1, 1), B(1, 7) からの距離の差が 2 である点 P の軌跡を求めよ。  
(ただし, P(X, Y) と置かずに求めよ。)

**27** 次の方程式で表される曲線を  $xy$  平面に図示せよ。

- (1)  $2x^2 + 3y^2 - 4x - 6y = 0$                       (2)  $2x^2 - 3y^2 - 4x - 6y = 0$

**28** 楕円  $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 3$  と直線  $l: y = -\frac{1}{2}x + k$  ( $k$  は定数) について, 次の間に答えよ。

- (1)  $C$  と  $l$  が接するときの  $k$  の値を求めよ。  
(接点の座標を置かずに, 2 通りの方法を考えよ。)
- (2)  $k = 4\sqrt{2}$  とする。 $C$  上の動点 P と  $l$  上の動点 Q について, 距離 PQ の最小値を求めよ。  
(微分法を用いずに 2 通りの方法を考えよ。)

**29** 双曲線  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) について,  $C$  上の点 P( $x_1, y_1$ ) における接線が  $C$  の 2 つの漸近線と交わる点を Q, R とする。

- (1) Q, R の座標を求めよ。
- (2) 原点を O とするとき, 三角形 OQR の面積は P によらず一定であることを示し, その面積を求めよ。

**30** 極方程式  $r = -(\theta - 1)^2 + 1$  ( $0 \leq \theta \leq 3$ ) で表される図形の概形を描け。  
( $xy$  平面を考える必要はない。)