

..... 極限

1 n を自然数とする。次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin 3n}{2n} \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{2}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n$$

2 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^6 + (2n+2)^6 + \cdots + (3n)^6}{n^7}$$

3 x を実数とする。次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\pi - 2x) \cos 3x}{\cos^2 x}$$

4 n は自然数とする。 xy 平面において 2 曲線 $y = \frac{1}{x}$, $y = ax(1-x)^{2n}$ はその共有点の 1 つにおいて共通の接線をもつ。

(1) a を n で表せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n^2}$ を求めよ。

5 自然数 n に対して、次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^x x^n dx$$

.....積分.....

13 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \tan x dx$ (2) $\int \tan^2 x dx$ (3) $\int \tan^3 x dx$

14 定積分 $\int_1^2 \frac{x^3}{x^2 - 2x + 2} dx$ の値を求めよ。

15 xy 平面上の曲線

$$x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

と x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。

16 領域 $0 \leq x \leq \frac{2}{\pi}x \leq y \leq \sin x$ を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

17 次の関係式を満たす関数 $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^x \{g(t) + t \cos t\} dt + \sin x, \\ g(x) = \sin x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{f'(t) - \cos t\} dt \end{cases}$$

18 関数 $f(x)$ を $f(x) = \int_0^1 t|x - 2t|dt$ で定めるとき、 $y = f(x)$ のグラフを描け。

19 自然数 n に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1$$

..... 複素数平面

20 $(1 + \sqrt{3}i)^{10}$ を計算せよ。ただし i は虚数単位である。

21 方程式 $z^3 = i$ を解け。ただし i は虚数単位である。

22 座標平面上で 8 点 A, B, C, D, E, F, G, H がこの順で反時計回りに並んで正 8 角形の頂点とし, A(1,1), B(3,0) であるとき, 点 C, D の座標を求めよ。

23 $z\bar{z} + iz - i\bar{z} = 2$ を満たす点 z の全体を複素数平面上に図示せよ。

24 複素数 z が $|z - 2i| = 1$ を満たしながら変化するとき, $\arg z$ のとり得る値の範囲を求めよ。ただし, $0 \leq \arg z < 2\pi$ とする。

25 複素数 z が単位円上の $z \neq 1$ である部分を動くとき, $w = \frac{2z}{z-1}$ で定まる複素数 w の描く軌跡を図示せよ。

.....いろいろな曲線.....

26 2点 A(1, 1), B(1, 7) からの距離の差が 2 である点 P の軌跡を求めよ。
(ただし, P(X, Y) と置かずに求めよ。)

27 次の方程式で表される曲線を xy 平面に図示せよ。

- (1) $2x^2 + 3y^2 - 4x - 6y = 0$ (2) $2x^2 - 3y^2 - 4x - 6y = 0$

28 楕円 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 3$ と直線 $l: y = -\frac{1}{2}x + k$ (k は定数) について, 次の間に答えよ。

- (1) C と l が接するときの k の値を求めよ。
(接点の座標を置かずに, 2 通りの方法を考えよ。)
- (2) $k = 4\sqrt{2}$ とする。 C 上の動点 P と l 上の動点 Q について, 距離 PQ の最小値を求めよ。
(微分法を用いずに 2 通りの方法を考えよ。)

29 双曲線 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) について, C 上の点 P(x_1, y_1) における接線が C の 2 つの漸近線と交わる点を Q, R とする。

- (1) Q, R の座標を求めよ。
- (2) 原点を O とするとき, 三角形 OQR の面積は P によらず一定であることを示し, その面積を求めよ。

30 極方程式 $r = -(\theta - 1)^2 + 1$ ($0 \leq \theta \leq 3$) で表される図形の概形を描け。
(xy 平面を考える必要はない。)