【積分計算ドリル】　解答

以下，C は積分定数を表すものとする．

【1】 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx = \int e^{-\frac{1}{2}x}dx = \boxed{-2e^{-\frac{1}{2}}+C} \left(= -\frac{2}{\sqrt{e^x}}+C \right)$

【2】 $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-2x}\,dx = \int (1-2x)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{4}(1-2x)^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{-2}+C = \boxed{-\frac{3}{8}(1-2x)^{\frac{4}{3}}+C}$

【3】 $\displaystyle\int (\log x)^2\,dx = x(\log x)^2 - \int x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x(\log x)^2 - \int 2\log x\,dx$

$\displaystyle = x(\log x)^2 - \Big(2x\log x - \int 2x\cdot\frac{1}{x}\,dx\Big) = \boxed{x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x + C}$

【4】 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x}\,dx = \int \Big(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\Big)\,dx = \log|x-1| - \log|x| + C = \boxed{\log\Big|\frac{x-1}{x}\Big| + C}$

【5】 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t-2\cos t)^2\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big\{t^2 - 4t\cos t + 2(1+\cos 2t)\big\}\,dt$

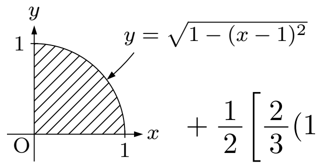
$\displaystyle = \Big[\frac{t^3}{3} - 4(t\sin t + \cos t) + 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24} - 4\Big(\frac{\pi}{2}-1\Big) + \pi = \boxed{\frac{\pi^3}{24} - \pi + 4}$

（注：区間 $\Big[0,\ \dfrac{\pi}{2}\Big]$ において，$\cos 2t$ は半周期分である．）

【6】 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos t}\,dt = \int_0^{\pi} \sqrt{4\cos^2\frac{t}{2}}\,dt = \int_0^{\pi} 2\cos\frac{t}{2}\,dt = \Big[4\sin\frac{t}{2}\Big]_0^{\pi} = \boxed{4}$

（注：区間 $[0,\ \pi]$ において，$\cos\dfrac{t}{2} \geqq 0$ である．）

【7】 $\displaystyle\int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)\,dx$

$=$ 

$\displaystyle + \frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1 = \frac{\pi\cdot 1^2}{4} + \frac{1}{3}(0-1) = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}}$

【8】 $\displaystyle\int_{-1}^1 (x+1+\sin x)(e^x+e^{-x})\,dx = 2\int_0^1 (e^x+e^{-x})\,dx = 2\Big[e^x - e^{-x}\Big]_0^1 = \boxed{2\Big(e-\frac{1}{e}\Big)}$

（注：$(x+\sin x)(e^x+e^{-x})$ は奇関数であり，(e^x+e^{-x}) は偶関数である．）

【9】 $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{-x}\,dx = \Big[x^3(-e^{-x}) - 3x^2e^{-x} + 6x(-e^{-x}) - 6e^{-x}\Big]_0^1$

$\displaystyle = (-1-3-6-6)e^{-1} - (-6) = \boxed{6 - \frac{16}{e}}$

【10】 $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{2x+3}{x^2+3}\,dx = \int_{-1}^3 \frac{2x}{x^2+3}\,dx + 3\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2+3}\,dx$

$\displaystyle = \Big[\log(x^2+3)\Big]_{-1}^3 + \cancel{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cancel{3}\cancel{(\tan^2 x+1)}}\,\frac{\sqrt{3}}{\cancel{\cos^2 x}}\,d\theta$ 　($x = \sqrt{3}\tan\theta$ と置換した.)

$\displaystyle = \log 12 - \log 4 + \sqrt{3}\Big(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\Big) = \boxed{\log 3 + \frac{\sqrt{3}\pi}{2}}$