【積分計算ドリル】　解答

以下，C は積分定数を表すものとする．

【1】 $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2}\,dx = \int \left\{\frac{1}{x-1} + (x-1)^{-2}\right\} dx$

$\displaystyle = \boxed{\log|x-1| - \frac{1}{x-1} + C}$

【2】 $\displaystyle\int \cos(\sin x)\cos x\,dx = \boxed{\sin(\sin x) + C}$

【3】 $\displaystyle\int \log(x^2-1)\,dx = \int \{\log|x+1| + \log|x-1|\}\,dx$

$= \{(x+1)\log|x+1| - x\} + \{(x-1)\log|x-1| - x\} + C$

$= \boxed{(x+1)\log|x+1| + (x-1)\log|x-1| - 2x + C}$

【4】 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{5}{2}}\,dx = \boxed{-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} + C}$

【5】 $\displaystyle\int_0^1 \frac{|s^2-s|}{\sqrt{2}}\cdot s^4\,ds = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 (s-s^2)s^4\,ds$　（$[0,1]$ において $s^2 - s \leqq 0$ である．）

$\displaystyle = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 (x^5 - s^6)\,ds = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) = \boxed{\frac{1}{42\sqrt{2}}}$

【6】 $\displaystyle\int_1^2 t\sqrt{2-t}\,dt = \int_1^2 \{(t-2)+2\}(2-t)^{\frac{1}{2}}\,dt = \int_1^2 \{-(2-t)^{\frac{3}{2}} + 2(2-t)^{\frac{1}{2}}\}\,dt$

$\displaystyle = \left[\frac{2}{5}(2-t)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(2-t)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{5}(0-1) - \frac{4}{3}(0-1) = \frac{20-6}{15} = \boxed{\frac{14}{15}}$

【7】 $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{1-\cos\frac{x}{2}}\,dx = \int_0^\pi \sqrt{2\sin^2\frac{x}{4}}\,dx = \sqrt{2}\int_0^\pi \sin\frac{x}{4}\,dx$

$\displaystyle = \sqrt{2}\left[-4\cos\frac{x}{4}\right]_0^\pi = \boxed{-4+4\sqrt{2}}$　（$[0,\pi]$ において $\sin\dfrac{x}{4} \geqq 0$ である．）

【8】 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t + \cos t)\sin^4 t\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin^4 t\,dt = 2\left[\frac{1}{5}\sin^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{2}{5}}$

（$\sin^7 x$ は奇関数であり，$\cos t\sin^4 t$ は偶関数である.）

【9】 $\displaystyle\int_1^e \log_2 x\,dx = \int_1^e \frac{\log x}{\log 2}\,dx = \frac{1}{\log 2}\Big[x\log x - x\Big]_1^e = \boxed{\frac{1}{\log 2}}$

【10】 $\displaystyle\int_2^3 \frac{u^2}{u-1}\,du = \int_2^3 \frac{(u^2-1)+1}{u-1}\,du = \int_2^3 \left(u+1+\frac{1}{u-1}\right) du$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{2}u^2 + u + \log|u-1|\right]_2^3 = \frac{9-4}{2} + 1 + \log 2 = \boxed{\frac{7}{2} + \log 2}$