(1)の【考え方２】で考えてみる。授業で扱ったのはこっち

定数 α, β, γ 用いて、$y_n = (\alpha n^2 + \beta n + \gamma)\cdot 3^{n-1}$ で表される数列 $\{y_n\}$ を考え

$$b_n = y_{n+1} - y_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となるように α, β, γ を見つけてみる。

$$\begin{aligned}
y_{n+1} - y_n &= \left\{\alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma\right\}\cdot 3^{(n+1)-1} - (\alpha n^2 + \beta n + \gamma)\cdot 3^{n-1} \\
&= \left[3\left\{\alpha n^2 + (2\alpha + \beta)n + (\alpha + \beta + \gamma)\right\} - (\alpha n^2 + \beta n + \gamma)\right]\cdot 3^{n-1} \\
&= \left\{(3\alpha - \alpha)n^2 + (6\alpha + 3\beta - \beta)n + (3\alpha + 3\beta + 3\gamma - \gamma)\right\}\cdot 3^{n-1} \\
&= \left\{2\alpha n^2 + (6\alpha + 2\beta)n + (3\alpha + 3\beta + 2\gamma)\right\}\cdot 3^{n-1}
\end{aligned}$$

$$b_n = n^2 \cdot 3^{n-1} = \left(1n^2 + 0n + 0\right)\cdot 3^n$$

だから、形を比べ $2\alpha = 1$，$6\alpha + 2\beta = 0$，$3\alpha + 3\beta + 2\gamma = 0$ としてみると

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{3}{2}, \gamma = -\frac{3}{2}$$

よって、

$$b_n = \left\{\frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{3}{2}(n+1) - \frac{3}{2}\right\}\cdot 3^n - \left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - \frac{3}{2}\right)\cdot 3^{n-1}$$

n を k に書き換えると

$$b_k = \left\{\frac{1}{2}(k+1)^2 - \frac{3}{2}(k+1) - \frac{3}{2}\right\}\cdot 3^k - \left(\frac{1}{2}k^2 - \frac{3}{2}k - \frac{3}{2}\right)\cdot 3^{k-1}$$

となり、

$k = 1, 2, \cdots, n$ として辺々加えると

$$\begin{aligned}
T_n = \ & \cancel{\left(\frac{1}{2}2^2 - \frac{3}{2}2 - \frac{3}{2}\right)\cdot 3^1} - \boxed{\left(\frac{1}{2}1^2 - \frac{3}{2}1 - \frac{3}{2}\right)\cdot 3^0} \\
& + \cancel{\left(\frac{1}{2}3^2 - \frac{3}{2}3 - \frac{3}{2}\right)\cdot 3^2} - \cancel{\left(\frac{1}{2}2^2 - \frac{3}{2}2 - \frac{3}{2}\right)\cdot 3^1} \\
& + \cancel{\left(\frac{1}{2}4^2 - \frac{3}{2}4 - \frac{3}{2}\right)\cdot 3^3} - \cancel{\left(\frac{1}{2}3^2 - \frac{3}{2}3 - \frac{3}{2}\right)\cdot 3^2} \\
& + \cdots \\
& + \boxed{\left\{\frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{3}{2}(n+1) - \frac{3}{2}\right\}\cdot 3^n} - \cancel{\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - \frac{3}{2}\right)\cdot 3^{n-1}} \\
= & \left\{\frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{3}{2}(n+1) - \frac{3}{2}\right\}\cdot 3^n - \left(\frac{1}{2}1^2 - \frac{3}{2}1 - \frac{3}{2}\right)\cdot 3^0 \\
= & \frac{(n^2 - n + 1)\cdot 3^n - 1}{2}
\end{aligned}$$