5・1

基礎の確認

a, b, c, d を実数とし，

$$\alpha = a + bi,\ \beta = c + di$$

とおく。

$$\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i \quad \cdots ①$$

$$\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i \quad \cdots ②$$

$$\alpha\beta = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad \cdots ③$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}i \quad \cdots ④$$

$\left(\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \text{ より}\right)$

$$(a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$$

①にも注意すると，この式は

(　　　　　　　　　)

が成り立つことを表している。

$$(a - bi) - (c - di) = (a - c) - (b - d)i$$

②にも注意すると，この式は

(　　　　　　　　　)

が成り立つことを表している。

$$(a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

③にも注意すると，この式は

(　　　　　　　　　)

が成り立つことを表している。

$$\frac{a - bi}{c - di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}i$$

$\left(\dfrac{a - bi}{c - di} = \dfrac{(a - bi)(c + di)}{(c - di)(c + di)} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \dfrac{-ad + bc}{c^2 + d^2}i \text{ より}\right)$

④にも注意すると，この式は

$\left(\qquad\qquad\qquad\qquad\right)$

が成り立つことを表している。

【5・1の別解】

$z = x + yi$（x, y は実数）と表示すると，

$$
\begin{aligned}
&z + \frac{1}{z} \\
&= x + yi + \frac{1}{x + yi} \\
&= x + yi + \frac{x - yi}{x^2 + y^2} \\
&= \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \left(y + \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)i
\end{aligned}
$$

これが実数となるために x, y が満たすべき条件は，(虚部) $= 0$ より

$$y + \frac{-y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\therefore\ y\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 0$$

$$\therefore\ y = 0 \text{ または } 1 - \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\therefore\ y = 0 \text{ または } x^2 + y^2 = 1$$

（ただし，$x^2 + y^2 \neq 0$ より

$(x, y) \neq (0, 0)$ ）

：

（以下略）

補助問題

【Q1】次の式を $\bigcirc z\bar{z} + \bigcirc z + \bigcirc \bar{z} + \bigcirc$ の形に変形せよ。

$$(z - 2i)\overline{(z - 2i)} =$$

5・2

補助問題

【Q2】$z=x+yi$（x, y は実数）と表示するとき，次の式を x, y で表せ。

(i) $|z+2i|=$

(ii) $|z+i|=$

【5・2の別解】

$z=x+yi$（x, y は実数）と表示すると，

$|z-2i|=\cdots$（略）

$|z+i|=\cdots$（略）

これより，等式 $|z-2i|=2|z+i|$ を変形すると

$$\sqrt{x^2+(y-2)^2}=2\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$\therefore\ x^2+(y-2)^2=4\left\{x^2+(y+1)^2\right\}$$

$$\therefore\ 3x^2+3y^2+12y=0$$

$$\therefore\ x^2+y^2+4y=0$$

$$\therefore\ x^2+(y+2)^2=4$$

:

（以下略）

補助問題

【Q3】次の等式を満たす点 z の全体を複素数平面上に図示せよ。

$$2|z+2|=|z-1|$$

5・3

基礎の確認

a, b, c, d を実数とし，

$$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di$$

とおくと，

$$\alpha\beta=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

より，

$$\begin{aligned}|\alpha\beta|&=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}\\&=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}\\&=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}\end{aligned}$$

であり，

$$|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2},\ |\beta|=\sqrt{c^2+d^2}$$

より，

$$\begin{aligned}|\alpha||\beta|&=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\\&=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\\&=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}\end{aligned}$$

だから，次が成り立つ。

(　　　　　　　　)

補助問題

【Q4】次の等式を $|w-(\text{定数})|=(\text{定数})$ の形に変形せよ。

$$|(1+i)w-1|=1$$

【5・3(後半)の別解】

$w=x+yi$（x, y は実数）と表示し，等式 $|w+1+2i|=|w+1|$ を変形すると，

$$|(x+1)+(y+2)i|=|(x+1)+yi|$$

$$\therefore\ \sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

$$\therefore\ (x+1)^2+(y+2)^2=(x+1)^2+y^2$$

$$\therefore\ 4y+4=0$$

$$\therefore\ y=-1$$

:

（以下略）