6・1

$C: y=x^2$ について，$y'=2x$ だから，

点$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$，$\mathrm{Q}(a,\ a^2)$ における C の接線の傾きはそれぞれ

$$2\times\frac{1}{2}=1\ ,\ \ 2a$$

であり，

(ア)____________________　だから

点$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$，$\mathrm{Q}(a,\ a^2)$ における C の法線 $l,\ m$ の傾きはそれぞれ $-1,\ -\frac{1}{2a}$ となる。

l は点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$を通る傾きが 1 の直線だから，その方程式は

(イ)____________________

$$\therefore\ l: y=-x+\frac{3}{4}\quad\cdots ①$$

m は点 $\mathrm{Q}(a,\ a^2)$を通る傾きが $-\frac{1}{2a}$ の直線だから，その方程式は

(ウ)____________________

$$\therefore\ m: y=-\frac{1}{2a}x+\frac{1}{2}+a^2\quad\cdots ②$$

(1)　$l,\ m$ の交点が C 上にあることから，

「$l,\ C$ の P でない方の交点が m 上にある」

と考えてよい。

$l,\ C$ の式を連立して解くと

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=-x+\frac{3}{4} \end{cases}\quad \therefore \begin{cases} x^2+x-\frac{3}{4}=0 \\ y=x^2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=0 \\ y=x^2 \end{cases}$$

$$\therefore\ (x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right),\ \left(-\frac{3}{2},\ \frac{9}{4}\right)$$

よって，$l,\ C$ の P でない方の交点は

$$\left(-\frac{3}{2},\ \frac{9}{4}\right)$$

であり，これを②に代入して

$$\frac{9}{4}=-\frac{1}{2a}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}+a^2$$

$$\therefore\ 4a^3-7a+3=0$$

$$\therefore\ (2a-1)(2a+3)(a-1)=0$$

設定より，$a>0,\ a\neq\frac{1}{2}$ だったから

$$a=1\quad\cdots(答)$$

(2)（図・立式は略。授業で）

求める面積は

$$S=\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot1-\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^2\,dx$$

$$=\frac{17}{24}\quad\cdots(答)$$

6・2

$C : y = x^3 - 3x$ について，$y' = 3x^2 - 3$ だから，点$\mathrm{P}(\alpha,\, \alpha^3 - 3\alpha)$ における C の接線（l とよぶことにする）の方程式は

$$y = (3\alpha^2 - 3)(x - \alpha) + \alpha^3 - 3\alpha$$

$$\therefore\ l : y = (3\alpha^2 - 3)x - 2\alpha^3$$

$C,\, l$ の交点の x 座標を求めるために，$C,\, l$ の式を連立し，y を消去すると

$$x^3 - 3x = (3\alpha^2 - 3)x - 2\alpha^3$$

$$\therefore\ x^3 - 3\alpha^2 x + 2\alpha^3 = 0$$

$$\therefore\ (x - \alpha)^2(x + 2\alpha) = 0$$

$$\therefore\ x = \alpha,\ -2\alpha$$

よって，P の x 座標は α，Q の x 座標は -2α である。

(1)（図は略。授業で）

$S_1 =$

(エ)____________________________

$$= \int_{-2\alpha}^{\alpha} (x^3 - 3\alpha^2 x + 2\alpha)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\alpha^4 - (-2\alpha)^4\right\} - \frac{3\alpha^2}{2}\left\{\alpha^2 - (-2\alpha)^2\right\} + 2\alpha\left\{\alpha - (-2\alpha)\right\}$$

$$= \left(-\frac{15}{4} - \frac{9}{2} + 6\right)\alpha^4 = \frac{27}{4}\alpha^4$$

(2) $Q(-2\alpha,\ -8\alpha^3 + 6\alpha)$ より，直線 OQ の方程式は

$$y = \frac{-8\alpha^3 + 6\alpha}{-2\alpha}x \quad \therefore\ y = (4\alpha^2 - 3)x$$

$S_2 =$

(オ)____________________________

$$= \int_{-2\alpha}^{0} (x^3 - 4\alpha^2 x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left\{0^4 - (-2\alpha)^4\right\} - \frac{4\alpha^2}{2}\left\{0^2 - (-2\alpha)^2\right\}$$

$$= (-4 + 8)\alpha^4 = 4\alpha^4$$

よって，

$$S_1 : S_2 = \frac{27}{4}\alpha^4 : 4\alpha^4 = 27 : 16 \text{（一定）}$$

（証明終）

6・3

$C : y = x^3 - 3x + 1$ を x 軸方向に $+a$ だけ平行移動した C_a の方程式は

(カ)____________________________________

と表される。

$C,\, C_a$ の共有点の x 座標を求めるために，$C,\, C_a$ の式を連立し，y を消去すると

$$x^3 - 3x + 1 = (x - a)^3 - 3(x - a) + 1$$

$$\therefore\ 3ax^2 - 3a^2x + a^3 + 3a = 0$$

設定より，$a > 0$ だったから，両辺を a で割ると

$$3x^2 - 3ax + a^2 + 3 = 0 \quad \cdots ①$$

(1) $C,\, C_a$ が２点で交わることから，①を満たす実数 x が２つあるので，

(①の判別式) > 0

$$\therefore\ 9a^2 - 4 \cdot 3(a^2 - 3) > 0$$

$$\therefore\ -3a^2 + 36 > 0$$

$$\therefore\ a^2 - 12 < 0$$

$$\therefore\ \left(a + 2\sqrt{3}\right)\left(a - 2\sqrt{3}\right) < 0$$

$$\therefore\ -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$$

設定の $a > 0$ と併せて，

$$0 < a < 2\sqrt{3} \quad \cdots \text{(答)}$$

(2)（授業で）