2020年 II期　高２理系数学（中高一貫） Lesson8

8・1

基 礎 の 確 認

[例題]

微分計算

$$\left\{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right\}' = \frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \times 2x$$
$$= 3x\sqrt{x^2+1}$$

を参考にすると，次が得られる。

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

（C は積分定数）

上の[例題]を参考にして次の空欄を埋めてみよう。（積分定数は C としておこう）

---

[1]　微分計算

$$\left\{\log\left|\sin x\right|\right\}' = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

を参考にすると，

$$\int \qquad\qquad dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

---

[2]　微分計算

$$\left\{\log\left|\log x\right|\right\}' = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

を参考にすると，

$$\int \qquad\qquad dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

---

[3]　微分計算

$$\left\{\log\left(e^x+1\right)\right\}' = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

を参考にすると，

$$\int \qquad\qquad dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

【8・1の別解：置換積分法を用いた場合】

(1)　$e^x + e^{-x} = t$ とおくと

$$\left(e^x - e^{-x}\right)dx = dt,\quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline t & 2 & \to & e-e^{-1} \end{array}$$

これより，

$$\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right)dx$$
$$= \int_2^{e+e^{-1}} \frac{1}{t}\,dx = \Big[\log|t|\Big]_2^{e+e^{-1}}$$
$$= \log\left(e+e^{-1}\right) - \log 2 \quad \cdots \text{(答)}$$

(2)　$\log x = t$ とおくと

$$\frac{1}{x}dx = dt,\quad \begin{array}{c|ccc} x & 1 & \to & e \\ \hline t & 0 & \to & 1 \end{array}$$

これより，

$$\int_1^e \frac{(\log x)^4}{x}\,dx$$
$$= \int_1^e (\log x)^4 \cdot \frac{1}{x}dx$$
$$= \int_0^1 t^4\,dt = \frac{1}{5} \quad \cdots \text{(答)}$$

(3)　$1 + x^2 = t$ とおくと

$$2x\,dx = dt,\quad \begin{array}{c|ccc} x & 1 & \to & 2 \\ \hline t & 2 & \to & 5 \end{array}$$

これより，

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$
$$= \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\,dx$$
$$= \int_2^5 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_2^5 t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_2^5 = \sqrt{5} - \sqrt{2} \quad \cdots \text{(答)}$$

(4)　$\cos x = t$ とおくと

$-\sin x\,dx = dt$,

x	$0 \to \pi$
t	$1 \to -1$

これより,

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx$$
$$= \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2 x\right)\sin x\,dx$$
$$= \int_0^{\pi} \left(-1 + \cos^2 x\right)(-\sin x)\,dx$$
$$= \int_1^{-1} \left(-1 + t^2\right)dt$$
$$= \left[-t + \frac{1}{3}t^3\right]_1^{-1} = \frac{4}{3} \quad \cdots \text{(答)}$$

8・2

【(1)の別解：置換積分法を用いない場合】

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4} (x+1)\sqrt{2x+1}\,dx$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{4} \left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right\}\sqrt{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}\,dx$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{4} \left\{\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}dx$$
$$= \left[\frac{2\sqrt{2}}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{4}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{5}\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{3^5}{4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3^3}{2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{243}{10} + \frac{9}{2} = \frac{144}{5} \quad \cdots \text{(答)}$$

8・3

２つの曲線 $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ と $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ の

「共有点の x 座標」と「上下関係」

を同時に調べるべく，２式の差を考えると

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}$$
$$= \frac{1}{1+x^2} \times (1-x^2)$$
$$= \frac{1}{1+x^2} \times \left\{-(x+1)(x-1)\right\}$$

これより,「共有点の x 座標」は $x = \pm 1$ とわかり，挟まれる範囲 $-1 < x < 1$ において「上下関係」は

[上]$\cdots$ $y = \dfrac{1}{x^2+1}$,　[下]$\cdots$ $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

となる。

よって，求める面積を S とすると,

$$S = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2}\right)dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{1+x^2}\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{-\left(1+x^2\right)+2}{1+x^2}\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \left(-1 + \frac{2}{1+x^2}\right)dx$$
$$= 2\int_0^{1} \left(-1 + \frac{2}{1+x^2}\right)dx$$
$$= -2 + 2\int_0^{1} \frac{2}{1+x^2}\,dx$$

（続きは授業で）