[1] 問題

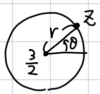
r を正の実数とする．複素数平面上で，点 z が点 $\dfrac{3}{2}$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき，

$$z+w=zw$$

を満たす点 w が描く図形を求めよ．

答案例A

$z=\frac{3}{2}+r(\cos\theta+i\sin\theta)$　とおける．



$z+w=zw$ に代入して整理すると

$$w=\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}+r(\cos\theta+i\sin\theta)}{\frac{1}{2}+r(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=\frac{\left(\frac{3}{2}+r\cos\theta\right)+(r\sin\theta)i}{\left(\frac{1}{2}+r\cos\theta\right)+(r\sin\theta)i}$$

$$=\frac{\left\{\left(\frac{3}{2}+r\cos\theta\right)+(r\sin\theta)i\right\}\left\{\left(\frac{1}{2}+r\cos\theta\right)-(r\sin\theta)i\right\}}{\left(\frac{1}{2}+r\cos\theta\right)^2+(r\sin\theta)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{3}{4}+2r\cos\theta+r^2\right)+(-r\sin\theta)i}{\frac{1}{4}+r\cos\theta+r^2}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}+2r\cos\theta+r^2}{\frac{1}{4}+r\cos\theta+r^2}+\frac{-r\sin\theta}{\frac{1}{4}+r\cos\theta+r^2}i$$

答案例B

$z+w=zw$ より

$$zw-z-w=0$$

$$\therefore (z-1)(w-1)=1$$

$$\therefore z-1=\frac{1}{w-1}$$

$$\therefore z=\frac{1}{w-1}+1$$

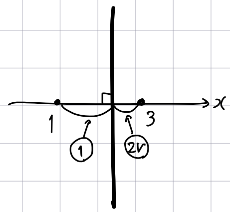
設定より $\left|z-\frac{3}{2}\right|=r$ だから

$$\left|\frac{1}{w-1}+1-\frac{3}{2}\right|=r$$

$$\therefore \left|\frac{1}{w-1}-\frac{1}{2}\right|=r$$

$$\therefore \left|\frac{2-(w-1)}{2(w-1)}\right|=r$$

$$\therefore |w-3|=2r|w-1|$$



$$\frac{1\times 2r+3\times 1}{1+2r}=\frac{2r+3}{2r+1}$$

よって，点 w が描く図形は

実部が $\frac{2r+3}{2r+3}$ の直線 //

©2022 藤田貴志

[2] 問題

$\alpha = \dfrac{2\pi}{7}$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$\cos 4\alpha = \cos 3\alpha$ であることを示せ．

(2)　$f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ とするとき，$f(\cos\alpha) = 0$ が成り立つことを示せ．

(3)　$\cos\alpha$ は無理数であることを示せ．

(1) 答案例C

$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1$

$= 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1$

$= 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

これより

$\cos 4\alpha - \cos 3\alpha = 8\cos^4\alpha - 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 3\cos\alpha + 1$

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 8 & -4 & -8 & 3 & 1 \\ & & 8 & 4 & -4 & -1 \\ \hline & 8 & 4 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$= (\cos\alpha - 1)(8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 1)$

$\alpha = \frac{2\pi}{7}$ より $\cos\alpha \neq 1$ だから

$8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 1 = 0$ を示せばよい．

$8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha - 1$

$= 8\cos^3\frac{2\pi}{7} + 4\cos^2\frac{2\pi}{7} - 4\cos\frac{2\pi}{7} - 1$

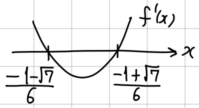
$= \cdots$

(2) 答案例D

$f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ より

$f'(x) = 24x^2 + 8x - 4$

$= 4(6x^2 + 2x - 1)$



x	$\cdots$	$\frac{-1-\sqrt{7}}{6}$	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{7}}{6}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\vdots$

(3) 答案例E

背理法で示す．

$\cos\alpha$ が有理数だったと仮定すると

$\cos\alpha = \dfrac{q}{p}$　(p, q は互いに素な整数)

とおける．

(2) より $f(\cos\alpha) = 0$ つまり $f\left(\frac{q}{p}\right) = 0$ だから

$8\left(\frac{q}{p}\right)^3 + 4\left(\frac{q}{p}\right)^2 - 4\left(\frac{q}{p}\right) + 1 = 0$

p^2 を両辺にかけて

$8 \cdot \dfrac{q^3}{p} + 4q^2 - 4pq + p^2 = 0$

$\therefore\ 8 \cdot \dfrac{q^3}{p} = -4q^2 + 4pq - p^2$　$\cdots$ ①

右辺が整数であることから p は q^3 の約数となり，

p と q が互いに素であることから $p = 1$ となる．

このとき ① は

$\underbrace{8q^3}_{\text{偶数}} = \underbrace{-4q^2 + 4q - 1}_{\text{奇数}}$

両辺の偶奇が異なり不合理．

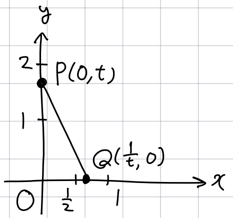
よって，示せた．//

©2022 藤田貴志

[3] 問題

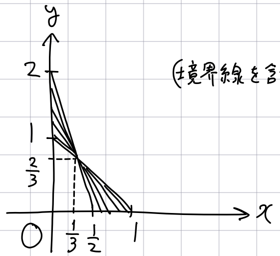
正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ t)$ と $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$ を考える．t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，座標平面上で線分 PQ が通過する部分を図示せよ．

答案例F



tが $1\leqq t\leqq 2$ の範囲を動くとき、
Pはy軸上を$(0,1)$から$(0,2)$まで動き、
Qはx軸上を$(1,0)$から$(\frac{1}{2},0)$まで動く。

よって、線分PQが通過する部分は次のとおり。



(境界線を含む)

答案例G

線分PQの方程式は

$$y=\frac{0-t}{\frac{1}{t}-0}(x-0)+t,\quad 0\leqq x\leqq \frac{1}{t}$$

$$\therefore\ y=-t^2x+t,\quad 0\leqq x\leqq \frac{1}{t}$$

平面上の点(X, Y)が求める領域に属しているための条件は

「$\begin{cases} Y=-t^2X+t & \cdots\cdots ① \\ 0\leqq X\leqq \frac{1}{t} & \cdots\cdots ② \end{cases}$

を満たすtが$1\leqq t\leqq 2$の範囲に存在すること」

である。

①より $\underbrace{Xt^2-t+Y}_{f(t)\text{とおく}}=0$

(ア) $f(1)f(2)\leqq 0$ の場合

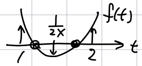
$(X-1+Y)(4X-2+Y)\leqq 0$

このとき $1\leqq t\leqq 2$ の範囲に存在し、$\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{t}\leqq 1$ だから

②より $0\leqq X\leqq\frac{1}{t}\leqq 1$ 　$\therefore\ 0\leqq X\leqq 1$

よって $\begin{cases} (Y+X-1)(Y+4X-2)\leqq 0 \\ 0\leqq X\leqq 1 \end{cases}$

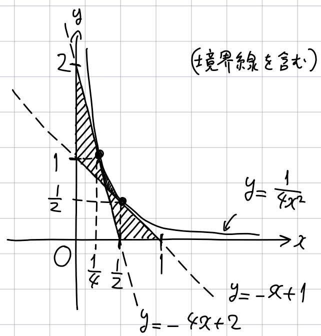
(イ) $f(1)f(2)>0$ の場合



$\begin{cases} f(1)>0 \\ f(2)>0 \\ 1<\frac{1}{2X}<2 \\ f(\frac{1}{2X})\leqq 0 \end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases} X-1+Y>0 \\ 4X-2+Y>0 \\ \frac{1}{4}<X<\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4X^2}+Y\leqq 0 \end{cases}$

よって $\begin{cases} Y>-X+1 \\ Y>-4X+2 \\ \frac{1}{4}<X<\frac{1}{2} \\ Y\leqq\frac{1}{4X^2} \end{cases}$

(ア),(イ)より求める領域は次のとおり。



(境界線を含む)

©2022 藤田貴志

[3] 問題

正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ t)$ と $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$ を考える．t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，座標平面上で線分 PQ が通過する部分を図示せよ．

答案例H

線分PQの方程式は

$$y=\frac{0-t}{\frac{1}{t}-0}(x-0)+t,\quad 0\leqq x\leqq \frac{1}{t}$$

$$\therefore\ y=-t^2x+t,\quad 0\leqq x\leqq \frac{1}{t}$$

平面上の点 (X, Y) が求める領域に属しているための条件は

「$\begin{cases} Y=-t^2X+t & \cdots\cdots ① \\ 0\leqq X\leqq \frac{1}{t} & \cdots\cdots ② \end{cases}$

を満たす t が $1\leqq t\leqq 2$ の範囲に存在すること」

である。

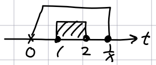
①より $\underbrace{Xt^2-t+Y}_{f(t)\text{とおく}}=0$

②より $\begin{cases} X=0 \text{ のときは } t>0 \\ X>0 \text{ のときは } 0<t\leqq \frac{1}{X} \end{cases}$

$1\leqq t\leqq 2$ との共通部分は

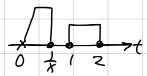
$X=0$ の場合は
$1\leqq t\leqq 2$

$\frac{1}{X}\geqq 2$ つまり $0<X\leqq\frac{1}{2}$ の場合は
$1\leqq t\leqq 2$



$1\leqq\frac{1}{X}<2$ つまり $\frac{1}{2}<X\leqq 1$ の場合は
$1\leqq t\leqq\frac{1}{X}$

$\frac{1}{X}<1$ つまり $1<X$ の場合は
なし。



$f(t)=0$ を満たす t が上記の範囲内に存在するための X, Y の条件を求めればよい。

⋮

©2022 藤田貴志

[4] 問題

$f(x) = \log(x+1) + 1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　方程式 $f(x) = x$ は，$x > 0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ．

(2)　(1)の解を α とする．実数 x が $0 < x < \alpha$ を満たすならば，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$0 < \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x)$$

(3)　数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = f(x_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

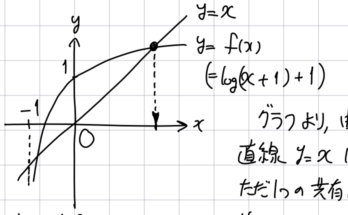
で定める．このとき，すべての自然数 n に対して，

$$\alpha - x_{n+1} < \frac{1}{2}(\alpha - x_n)$$

が成り立つことを示せ．

(4)　(3) の数列 $\{x_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ を示せ．

(1) 答案例I



グラフより，曲線 $y=f(x)$ と
直線 $y=x$ は $x>0$ の範囲で
ただ1つの共有点をもつから，
方程式 $f(x)=x$ は $x>0$ の範囲で ただ1つの解をもつ．//

(1) 答案例J

$g(x) = f(x) - x$ とおく．

$g(x) = \log(x+1) + 1 - x$ より

$g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{-x}{x+1} < 0$ ($x>0$ より)

これより $g(x)$ は単調減少であり，
さらに $g(0) = 1 > 0$ だから
$g(x)=0$ となる x が $x>0$ の範囲にただ1つ存在し，示せた．//

©2022 藤田貴志

[4] 問題

$f(x)=\log(x+1)+1$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　方程式 $f(x)=x$ は，$x>0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ．

(2)　(1)の解を α とする．実数 x が $0<x<\alpha$ を満たすならば，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$0<\frac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}<f'(x)$$

(2) 答案例K

$\ell(x)=\dfrac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}=\dfrac{\alpha-\log(x+1)-1}{\alpha-x}$ とおくと

$$\ell'(x)=\frac{-\frac{1}{x+1}(\alpha-x)-\{\alpha-\log(x+1)-1\}(-1)}{(\alpha-x)^2}$$

$$=\frac{1}{(\alpha-x)^2}\Big\{\underbrace{\frac{-\alpha+x}{x+1}+\alpha-\log(x+1)-1}_{=h(x)\text{ とおく}}\Big\}$$

$$h'(x)=\frac{1(x+1)-(-\alpha+x)\cdot 1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}\{1+\alpha-(x+1)\}$$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}(\alpha-x)>0\quad(0<x<\alpha\text{ より})$$

これより $\ell'(x)>0$ であり $\ell(x)$ は単調増加.

これと $\ell(0)=\dfrac{\alpha-\log 1-1}{\alpha-0}=1-\dfrac{1}{\alpha}>0$ より $\ell(x)>0$.

一方, $r(x)=f'(x)-\dfrac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{\alpha-\log(x+1)-1}{\alpha-x}$

とおくと

$$r'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}(\alpha-x)$$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}(-1-\alpha+x)$$

$r'(x)=0$ とすると $x=\alpha+1$ となるがこれは $0<x<\alpha$ を満たさないので

x	(0)	$\cdots$	(α)
$r'(x)$		$-$	
$r(x)$		↘	

これと $r(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}>0$ より $r(x)>0$.

以上より, $0<\dfrac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}<f'(x)$ //

©2022 藤田貴志

[4] 問題

$f(x) = \log(x+1)+1$ とする．以下の問いに答えよ．

(2)　(1)の解を α とする．実数 x が $0 < x < \alpha$ を満たすならば，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$0 < \frac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x)$$

(3)　数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = f(x_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

で定める．このとき，すべての自然数 n に対して，

$$\alpha - x_{n+1} < \frac{1}{2}(\alpha - x_n)$$

が成り立つことを示せ．

(4)　(3) の数列 $\{x_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ を示せ．

(3) 答案例L

数学的帰納法で示す.

(I)　$n=1$ のとき

$\alpha - x_2 < \frac{1}{2}(\alpha - x_1)$ より

$\alpha - f(1) < \frac{1}{2}(\alpha - 1)$

$\therefore\ \alpha - (\log 2 + 1) < \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{1}{2}\alpha < \log 2 + \frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha < 2\log 2 + 1$

ここで，$f(2) - 2 = \log 3 - 1 = \log 3 - \log e > 0$

$f(3) - 3 = \log 4 - 2 = 2(\log 2 - \log e) < 0$

より $2 < \alpha < 3$ だから，成り立つ //

(II)　$n=k$ のとき成り立つと仮定すると

$\alpha - x_{k+1} < \frac{1}{2}(\alpha - x_k)$

このとき

$\alpha - x_{k+2} < \frac{1}{2}(\alpha - x_{k+1})$

が成り立つことを示す.

⋮

(4) 答案例M

(3) より

$\alpha - x_{n+1} < \frac{1}{2}(\alpha - x_n)$

$< \left(\frac{1}{2}\right)^2(\alpha - x_{n-1})$

$< \cdots$

$< \left(\frac{1}{2}\right)^n(\alpha - x_1)$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n(\alpha - 1) \quad (n=1,2,3,\cdots)$

$\therefore\ \alpha - x_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(\alpha - 1) \quad (n=1,2,3,\cdots)$

$n\to\infty$ のとき (右辺) $\longrightarrow 0$ だから

$\alpha - x_n \longrightarrow 0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ //

©2022 藤田貴志

[5] 問題

座標平面において，t を媒介変数として

$$x = e^t \cos t + e^\pi,\quad y = e^t \sin t \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする．曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

答案例N

$$C : \begin{cases} x = e^t \cos t + e^\pi \\ y = e^t \sin t \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

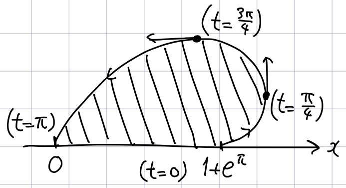
$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t + e^t(-\sin t)$$
$$= e^t \cdot \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t$$
$$= e^t \cdot \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = 0 \text{ とすると } t = \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{dy}{dt} = 0 \text{ とすると } t = \dfrac{3\pi}{4} \end{array}\right\} \text{だから}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$\frac{dy}{dt}$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
(x, y)	$\nearrow$	$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\swarrow$

$$(1+e^\pi, 0)\ \left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + e^\pi, \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)\ \left(-\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + e^\pi, \frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right),\ (0, 0)$$



$0 \leqq t \leqq \pi$ においてつねに $y \geqq 0$ だから

$$(\text{面積}) = \int_0^\pi y\, dt$$
$$= \int_0^\pi e^t \sin t\, dt$$
$$= \left[\frac{1}{2}\left(e^t \sin t\right)^2 \times \frac{1}{e^t \sin t + e^t \cos t} \right]_0^\pi$$
$$= 0 \quad \cdots ??$$

©2022 藤田貴志