数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 x に対して，等式 $\dfrac{1}{\tan x} - \tan x = \dfrac{2}{\tan(2x)}$ を証明せよ．

(2) $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ の値を求めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束，発散について調べ，収束する場合はその和を求めよ．

【2022 年 九州大・工学部 (後期)】

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 x に対して，等式 $\dfrac{1}{\tan x} - \tan x = \dfrac{2}{\tan(2x)}$ を証明せよ．

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 x に対して，等式 $\dfrac{1}{\tan x} - \tan x = \dfrac{2}{\tan(2x)}$ を証明せよ.

証明　$\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ より，

$$\frac{2}{\tan 2x} = \frac{1-\tan^2 x}{\tan x}.$$

よって，

$$\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{2}{\tan(2x)} \qquad \cdots ①$$

が成り立つ.

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 x に対して，等式 $\dfrac{1}{\tan x} - \tan x = \dfrac{2}{\tan(2x)}$ を証明せよ.

$$(\text{第 } N \text{ 部分和 } S_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right).$$

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 x に対して，等式 $\dfrac{1}{\tan x} - \tan x = \dfrac{2}{\tan(2x)}$ を証明せよ．

$$(\text{第 } N \text{ 部分和 } S_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right).$$

(第 N 部分和 S_N) が計算できる！

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 x に対して，等式 $\dfrac{1}{\tan x} - \tan x = \dfrac{2}{\tan(2x)}$ が成立.

$$(\text{第 } N \text{ 部分和 } S_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right).$$

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 x に対して，等式 $\dfrac{1}{\tan x} - \tan x = \dfrac{2}{\tan(2x)}$ が成立.

$$(\text{第 } N \text{ 部分和 } S_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right).$$

$\theta_k = \dfrac{\pi}{2^{k+3}}$ とおくと，$0 < \theta_k \leqq \dfrac{\pi}{2^3} < \dfrac{\pi}{4}$ であるから，①より，$k \geqq 1$ のとき，

$$\tan\theta_k = \frac{1}{\tan\theta_k} - \frac{2}{\tan\theta_{k-1}}.$$

$$\frac{1}{2^k}\tan\theta_k = \frac{1}{2^k\tan\theta_k} - \frac{1}{2^{k-1}\tan\theta_{k-1}}.$$

$$a_k = \frac{1}{2^k\tan\theta_k} - \frac{1}{2^{k-1}\tan\theta_{k-1}}.$$

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 x に対して，等式 $\dfrac{1}{\tan x} - \tan x = \dfrac{2}{\tan(2x)}$ が成立.

$$(\text{第 } N \text{ 部分和 } S_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right).$$

$\theta_k = \dfrac{\pi}{2^{k+3}}$ とおくと，$a_k = \dfrac{1}{2^k \tan\theta_k} - \dfrac{1}{2^{k-1}\tan\theta_{k-1}}$.

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2^k\tan\theta_k} - \frac{1}{2^{k-1}\tan\theta_{k-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^N\tan\theta_N} - \frac{1}{2^0\tan\theta_0} = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{\theta_N}{\tan\theta_N} - \frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}}. \end{aligned}$$

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 x に対して，等式 $\dfrac{1}{\tan x} - \tan x = \dfrac{2}{\tan(2x)}$ が成立.

$$(\text{第 } N \text{ 部分和 } S_N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right).$$

$\theta_k = \dfrac{\pi}{2^{k+3}}$ とおくと，$a_k = \dfrac{1}{2^k \tan\theta_k} - \dfrac{1}{2^{k-1}\tan\theta_{k-1}}$.

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\theta_N}{\tan\theta_N} - \frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}} \to \boldsymbol{\frac{8}{\pi} - \sqrt{2} - 1} \ (N \to \infty).$$

【1995 東北大・理系学部 (前期)】　$0 < u < \dfrac{\pi}{4}$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする.

(1) $\dfrac{1}{\tan u} - \dfrac{2}{\tan 2u}$ を簡単にせよ.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n}$ の和を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ を用いてよい.

【1995 東北大・理系学部 (前期)】　$0 < u < \dfrac{\pi}{4}$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

(1) $\dfrac{1}{\tan u} - \dfrac{2}{\tan 2u}$ を簡単にせよ．

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n}$ の和を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ を用いてよい．

$\boxed{\text{解答}}$(1) $\dfrac{1}{\tan u} - \dfrac{2}{\tan 2u} = \dfrac{1}{\tan u} - \dfrac{1-\tan^2 u}{\tan u} = \dfrac{\tan^2 u}{\tan u} = \boldsymbol{\tan u}$.

(2)

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{\tan \frac{\theta}{2^n}} - \frac{2}{\tan \frac{\theta}{2^{n-1}}} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n \tan \frac{\theta}{2^n}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^{n-1} \tan \frac{\theta}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2^N \tan \frac{\theta}{2^N}} - \frac{1}{\tan \theta} \to \boldsymbol{\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\tan \theta}} \ (N \to \infty).$$

2022 九大 (後)

$$\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{2}{\tan(2x)}$$ を示し,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)$$ を求めよ.

1995 東北大 (前)

$$\frac{1}{\tan u} - \frac{2}{\tan 2u}$$ を簡単にせよ.

さらに, $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n}$$ を求めよ.

2022 九大 (後)

$$\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{2}{\tan(2x)}$$ を示し，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)$$ を求めよ．

1995 東北大 (前)

$$\frac{1}{\tan u} - \frac{2}{\tan 2u}$$ を簡単にせよ．

さらに，$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n}$$ を求めよ．

ズレた形の認識

【1991 年 東京医大】(1) 次の $\boxed{}$ を適当な数値でうめよ.

$$\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2} = \boxed{}\sin\theta - \boxed{}\sin 2\theta.$$

(2) 次の無限級数の和を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\sin^2\frac{x}{2^n}.$$

【1991年 東京医大】(1) 次の $\boxed{}$ を適当な数値でうめよ.

$$\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}=\boxed{}\sin\theta-\boxed{}\sin 2\theta.$$

(2) 次の無限級数の和を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\sin^2\frac{x}{2^n}.$$

$\boxed{\text{解答}}$

$$\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2}=\sin\theta\cdot\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1}{2}(\sin\theta-\sin\theta\cos\theta)=\frac{1}{2}\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\sin\theta-\boldsymbol{\frac{1}{4}}\sin 2\theta.$$

【1991 年 東京医大】(1) $\sin\theta\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}\sin\theta - \boxed{\dfrac{1}{4}}\sin 2\theta$.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\sin^2\frac{x}{2^n}$ の和を求めよ.

【1991 年 東京医大】(1) $\sin\theta\sin^2\frac{\theta}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}\sin\theta - \boxed{\frac{1}{4}}\sin 2\theta.$

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\sin^2\frac{x}{2^n}$ の和を求めよ.

解答 (2)

【1991年 東京医大】(1) $\sin\theta\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}\sin\theta - \boxed{\dfrac{1}{4}}\sin 2\theta.$

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\sin^2\frac{x}{2^n}$ の和を求めよ.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\sin\frac{x}{2^{k-1}}\sin^2\frac{x}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-3}\left(2\sin\frac{x}{2^{k-1}} - \sin\frac{x}{2^{k-2}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2^{k-2}\sin\frac{x}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-3}\sin\frac{x}{2^{k-2}} = 2^{n-2}\sin\frac{x}{2^{n-1}} - \frac{1}{4}\sin 2x.$$

【1991 年 東京医大】(1) $\sin\theta\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}\sin\theta - \boxed{\dfrac{1}{4}}\sin 2\theta$.

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\sin^2\frac{x}{2^n}$ の和を求めよ.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\sin\frac{x}{2^{k-1}}\sin^2\frac{x}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-3}\left(2\sin\frac{x}{2^{k-1}} - \sin\frac{x}{2^{k-2}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2^{k-2}\sin\frac{x}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-3}\sin\frac{x}{2^{k-2}} = 2^{n-2}\sin\frac{x}{2^{n-1}} - \frac{1}{4}\sin 2x.$$

ここで, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^{n-2}\sin\frac{x}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\frac{x}{2^{n-1}}} = \frac{x}{2}$ であるから,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\sin^2\frac{x}{2^n} = \boldsymbol{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x}.$$

【2016 大阪府立大学 現代システム科・地域保健学域 (前期)】

(1) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\cos 2\alpha\sin\beta.$$

(2) k, n を自然数とし, θ は $\sin\theta\neq 0$ を満たすとする. (1) の等式で $\alpha=k\theta$, $\beta=\theta$ とおくことにより次の等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta=\frac{\cos(n+1)\theta\sin n\theta}{\sin\theta}.$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\cos^2\frac{k\pi}{100}$ の値を求めよ.

【2016 大阪府立大学 現代システム科・地域保健学域 (前期)】

(1) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha - \cos\alpha\sin(\alpha-\beta) = \cos 2\alpha \sin\beta.$$

【2016 大阪府立大学 現代システム科・地域保健学域 (前期)】

(1) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha - \cos\alpha\sin(\alpha-\beta) = \cos 2\alpha\sin\beta.$$

証明

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\sin\alpha - \cos\alpha(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) \\ &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\beta \\ &= \cos 2\alpha\sin\beta = (\text{右辺}).\end{aligned}$$

【2016 大阪府立大学 現代システム科・地域保健学域 (前期)】

(1) $\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\cos 2\alpha\sin\beta$.

(2) k，n を自然数とし，θ は $\sin\theta\neq 0$ を満たすとする．(1) の等式で $\alpha=k\theta$，$\beta=\theta$ とおくことにより次の等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta=\frac{\cos(n+1)\theta\sin n\theta}{\sin\theta}.$$

【2016 大阪府立大学 現代システム科・地域保健学域 (前期)】

(1) $\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\cos 2\alpha\sin\beta$.

(2) k, n を自然数とし，θ は $\sin\theta\neq 0$ を満たすとする．(1) の等式で $\alpha=k\theta$, $\beta=\theta$ とおくことにより次の等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta=\frac{\cos(n+1)\theta\sin n\theta}{\sin\theta}.$$

(1) の等式で $\alpha=k\theta$, $\beta=\theta$ とおくことにより,

$$\cos(k+1)\theta\sin k\theta-\cos k\theta\sin(k-1)\theta=\cos 2k\theta\sin\theta$$

の成立がわかるので,

【2016 大阪府立大学 現代システム科・地域保健学域 (前期)】

(1) $\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha - \cos\alpha\sin(\alpha-\beta) = \cos 2\alpha\sin\beta$.

(2) k，n を自然数とし，θ は $\sin\theta \neq 0$ を満たすとする．(1) の等式で $\alpha = k\theta$，$\beta = \theta$ とおくことにより次の等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=1}^{n} \cos 2k\theta = \frac{\cos(n+1)\theta\sin n\theta}{\sin\theta}.$$

(1) の等式で $\alpha = k\theta$，$\beta = \theta$ とおくことにより，

$$\cos(k+1)\theta\sin k\theta - \cos k\theta\sin(k-1)\theta = \cos 2k\theta\sin\theta$$

の成立がわかるので，

$$\sum_{k=1}^{n} \cos 2k\theta\sin\theta = \cos(n+1)\theta\sin n\theta - \cos\theta\sin 0.$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{n} \cos 2k\theta = \frac{\cos(n+1)\theta\sin n\theta}{\sin\theta}.$$

【2016 大阪府立大学 現代システム科・地域保健学域 (前期)】

(1) $\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha - \cos\alpha\sin(\alpha-\beta) = \cos 2\alpha\sin\beta.$

(2) n を自然数とし，θ は $\sin\theta \neq 0$ を満たすとするとき，

$$\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta = \frac{\cos(n+1)\theta\sin n\theta}{\sin\theta}.$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\cos^2\frac{k\pi}{100}$ の値を求めよ．

【2016 大阪府立大学 現代システム科・地域保健学域 (前期)】

(1) $\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha - \cos\alpha\sin(\alpha-\beta) = \cos 2\alpha \sin\beta$.

(2) n を自然数とし，θ は $\sin\theta \neq 0$ を満たすとするとき，

$$\sum_{k=1}^{n} \cos 2k\theta = \frac{\cos(n+1)\theta \sin n\theta}{\sin\theta}.$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \cos^2 \frac{k\pi}{100}$ の値を求めよ．

$\displaystyle\cos^2 \frac{k\pi}{100} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2k\pi}{100}\right)$ より，

【2016 大阪府立大学 現代システム科・地域保健学域 (前期)】

(1) $\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\cos 2\alpha\sin\beta$.

(2) n を自然数とし，θ は $\sin\theta\neq 0$ を満たすとするとき，

$$\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta=\frac{\cos(n+1)\theta\sin n\theta}{\sin\theta}.$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\cos^2\frac{k\pi}{100}$ の値を求めよ．

$\displaystyle\cos^2\frac{k\pi}{100}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2k\pi}{100}\right)$ より，

$$\sum_{k=1}^{100}\cos^2\frac{k\pi}{100}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{100}\left(1+\cos\frac{2k\pi}{100}\right)=50+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{100}\cos 2k\cdot\frac{\pi}{100}$$

$$=50+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\frac{101}{100}\pi\sin\frac{100}{100}\pi}{\sin\frac{\pi}{100}}=\mathbf{50}.$$