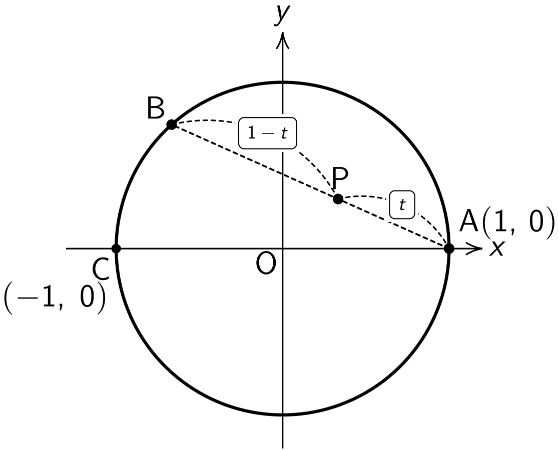
共テのベクトルを考える.

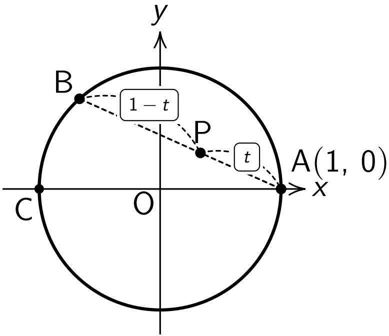
共テのベクトルを考える．

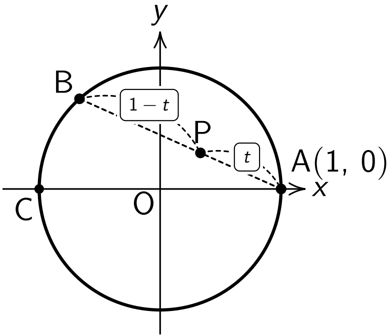
平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に，3 点 A，B，C があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\frac{2}{3}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たすとする．t を $0 < t < 1$ を満たす実数とし，線分 AB を $t : (1-t)$ に内分する点を P とする．また，直線 OP 上に点 Q をとる．

平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に，3 点 A，B，C があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\dfrac{2}{3}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たすとする．t を $0 < t < 1$ を満たす実数とし，線分 AB を $t : (1 - t)$ に内分する点を P とする．また，直線 OP 上に点 Q をとる．

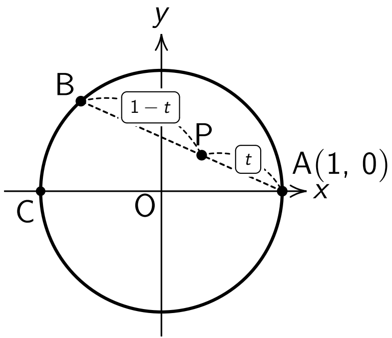
平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に，3 点 A，B，C があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\dfrac{2}{3}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たすとする．t を $0<t<1$ を満たす実数とし，線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を P とする．また，直線 OP 上に点 Q をとる．




y
B
1 − t
P
t
A(1, 0)
x
C
O



(1) $\cos\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である.

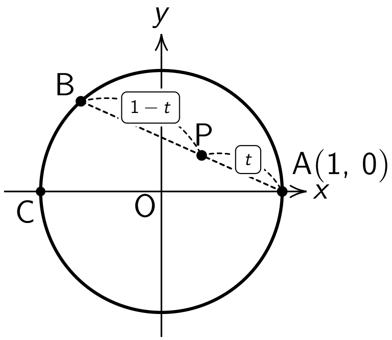


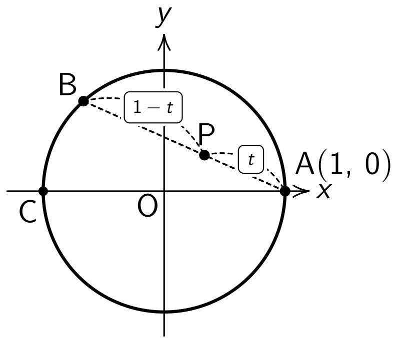
(1) $\cos\angle\text{AOB} = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である．

また，実数 k を用いて，$\overrightarrow{\text{OQ}} = k\,\overrightarrow{\text{OP}}$ と表せる．したがって

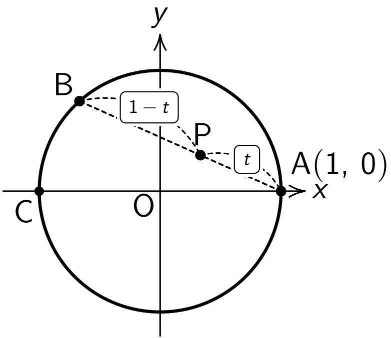
$$\overrightarrow{\text{OQ}} = \boxed{\text{エ}}\,\overrightarrow{\text{OA}} + \boxed{\text{オ}}\,\overrightarrow{\text{OB}}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

$$\overrightarrow{\text{CQ}} = \boxed{\text{カ}}\,\overrightarrow{\text{OA}} + \boxed{\text{キ}}\,\overrightarrow{\text{OB}}.$$


y
B
1 − t
P
t
A(1, 0)
x
C
O



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が垂直となるのは，$t = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときである．

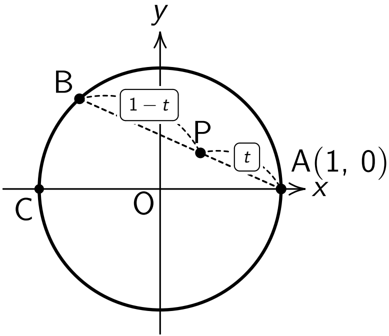


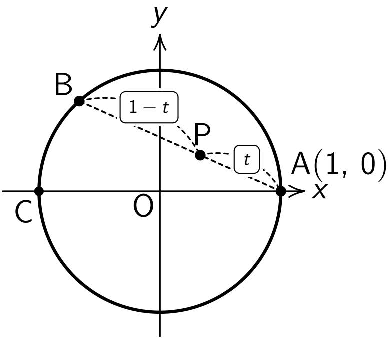
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が垂直となるのは，$t = \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ のときである． $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$ のとき．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \left\{ (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} \right\} = (1-t) - \frac{2}{3}t = 1 - \frac{5}{3}t = 0$$

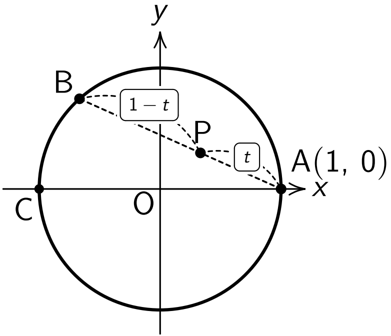
より，$t = \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{5}}$．

(1) は終わり


y
B
1 − t
P
t
A(1, 0)
x
C
O



以下，$t \neq \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{5}}$ とし，$\angle\mathrm{OCQ}$ が直角であるとする．

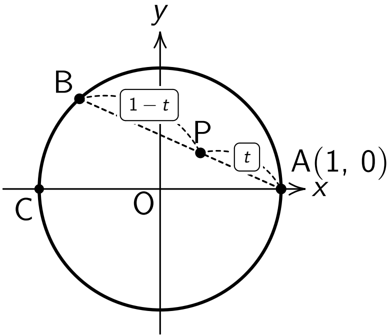


以下，$t \neq \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{5}}$ とし，∠OCQ が直角であるとする．

∠OCQ が直角であることにより，(1) の k は

$$k = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}\,t - \boxed{\text{シ}}}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

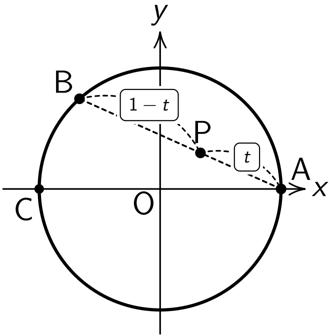
となることがわかる．



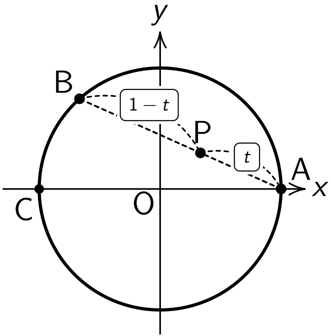
$$\angle\mathrm{OCQ}\text{ が直角であることにより，}\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=0.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left\{(k-kt+1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+kt\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}=(kt-k-1)+\frac{2}{3}kt=0.$$

$k(5t-3)=3$ より，(1) の k は $k=\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{5}\,t-\boxed{3}}$. $\cdots$②

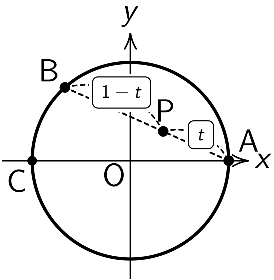


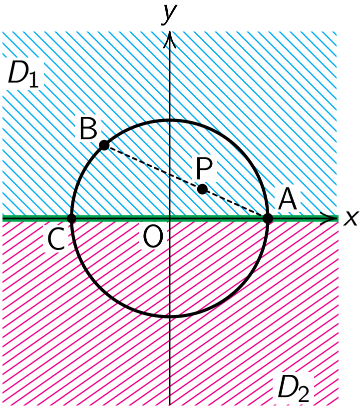
以下，$t \neq \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{5}}$ とし，$\angle$OCQ が直角であるとする．

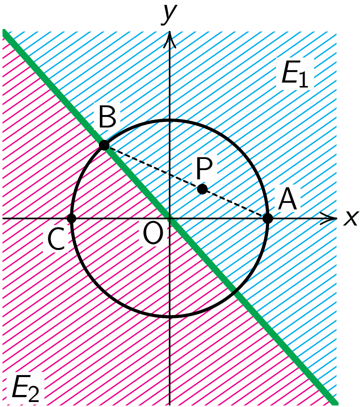


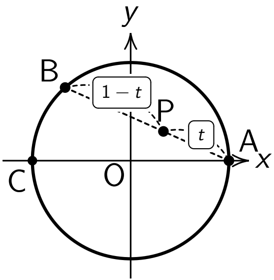
以下，$t \neq \dfrac{\boxed{3}}{\boxed{5}}$ とし，$\angle\mathrm{OCQ}$ が直角であるとする．

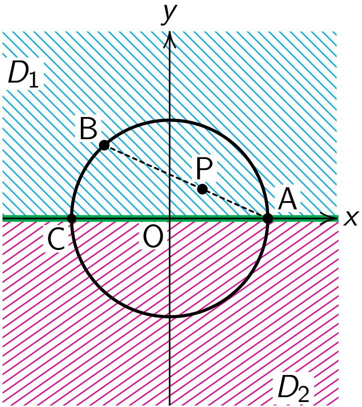
- $0 < t < \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ ならば，点 Q は $\boxed{\text{ス}}$ ．
- $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} < t < 1$ ならば，点 Q は $\boxed{\text{セ}}$ ．

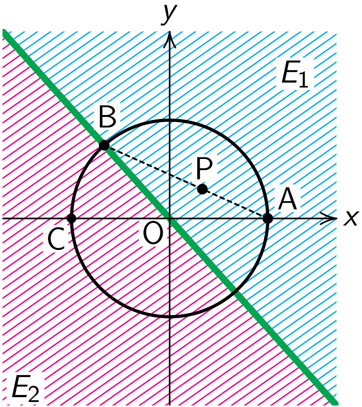

y
B
1 − t
P
t
A
x
C
O


y
D1
B
P
A
x
C
O
D2

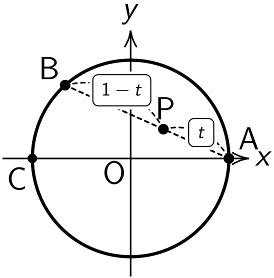

y
E1
B
P
A
x
C
O
E2

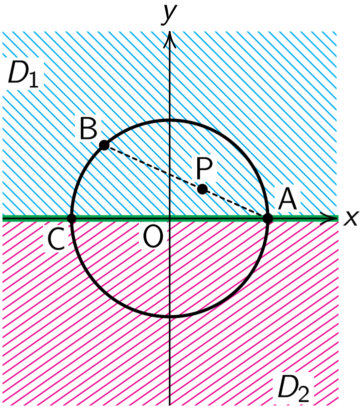


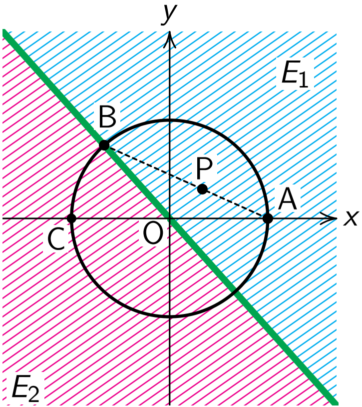




- $0 < t < \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ ならば，点 Q は $\boxed{\text{ス}}$.
- $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} < t < 1$ ならば，点 Q は $\boxed{\text{セ}}$.



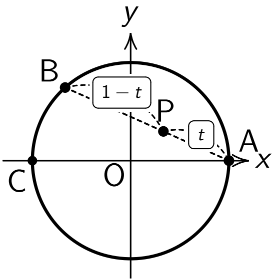


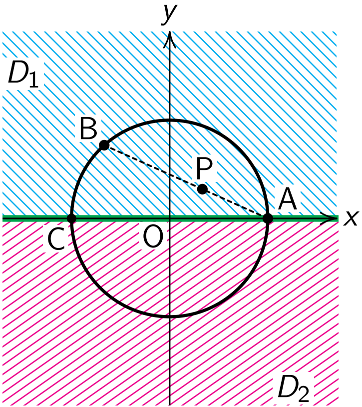


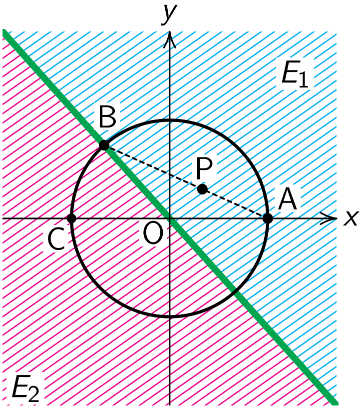
- $0 < t < \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ ならば，点 Q は $\boxed{\text{ス}}$ ．

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3}{5t-3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}.$$

- $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} < t < 1$ ならば，点 Q は $\boxed{\text{セ}}$ ．







- $0 < t < \dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ ならば，点 Q は $\boxed{\text{ス}}$.
- $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} < t < 1$ ならば，点 Q は $\boxed{\text{セ}}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3}{5t-3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}.$$

(2) は終わり！

(3) 太郎さんと花子さんは，点 P の位置と $\left|\overrightarrow{OQ}\right|$ の関係について考えている．$t = \dfrac{1}{2}$ のとき，①と②により，$\left|\overrightarrow{OQ}\right| = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ とわかる．

太郎：$t \neq \dfrac{1}{2}$ のときにも，$\left|\overrightarrow{OQ}\right| = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となる場合があるかな．

花子：$\left|\overrightarrow{OQ}\right|$ を t を用いて表して，$\left|\overrightarrow{OQ}\right| = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ を満たす t の値について考えればいいと思うよ．

太郎：計算が大変そうだね．

花子：直線 OA に関して，$t = \dfrac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R としたら，$\left|\overrightarrow{OR}\right| = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となるよ．

太郎：$\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表すことができれば，t の値が求められそうだね．

(3) 最後 直線 OA に関して，$t = \dfrac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{CR}} = \boxed{\text{タ}}\,\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \boxed{\text{チ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{\text{ツ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる．$t \neq \dfrac{1}{2}$ のとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となる t の値は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である．

(3) 太郎さんと花子さんは，点 P の位置と $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ の関係について考えている．$t = \dfrac{1}{2}$ のとき，①と ② により，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ とわかる．

(3) 太郎さんと花子さんは，点 P の位置と $\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ の関係について考えている．$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，① と ② により，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ とわかる．

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，① より $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ であり，② より $k=-6$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-3\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right).$$

ここで，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=1+1+2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$$

より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ であるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|=3\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{\boxed{6}}$.

太郎：$t \neq \dfrac{1}{2}$ のときにも，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \sqrt{\boxed{\ 6\ }}$ となる場合があるかな．

花子：$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ を t を用いて表して，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = \sqrt{\boxed{\ 6\ }}$ を満たす t の値について考えればいいと思うよ．

太郎：計算が大変そうだね．

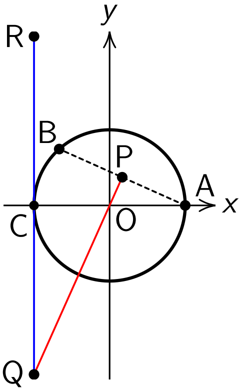
花子：直線 OA に関して，$t = \dfrac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R としたら，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right| = \sqrt{\boxed{\ 6\ }}$ となるよ．

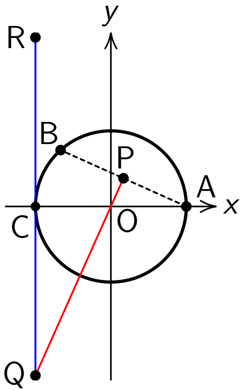
太郎：$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すことができれば，t の値が求められそうだね．

花子：直線 OA に関して，$t = \dfrac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R としたら，

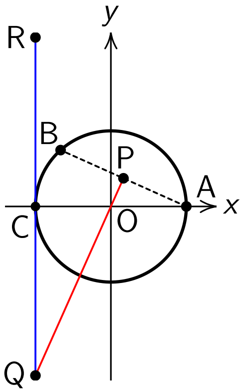
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right| = \sqrt{\boxed{\ 6\ }}$$ となるよ．

太郎：$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表すことができれば，t の値が求められそうだね．

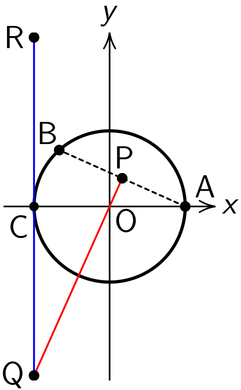




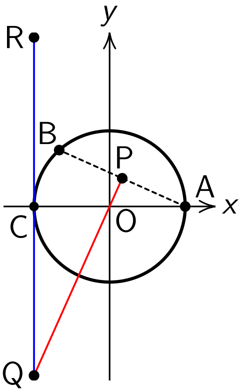
$$\overrightarrow{\mathrm{CR}} = \boxed{\ -\ }\,\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \boxed{\ 2\ }\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{\ 3\ }\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}.$$



$$\overrightarrow{\mathrm{CR}} = \boxed{\ -\ }\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \boxed{\ 2\ }\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \boxed{\ 3\ }\overrightarrow{\mathrm{OB}}.$$



t を $\left(\dfrac{1}{2}\text{以外の}\right)$ ある値で定めたときの点 Q の位置が点 R の位置と一致するような t を考えればよい.



t を $\left(\frac{1}{2}\text{ 以外の}\right)$ ある値で定めたときの点 Q の位置が点 R の位置と一致するような t を考えればよい.

$$k\left\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}\right)$$

より $k=4,\ t=\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$.

点 Q は直線 OP 上の点であるから，P が AB と OR の交点．P や Q は t に依存するので，parameter を明記して P_t や Q_t，R_t とするとわかりやすい (R_t は Q_t の x 軸に関する対称点)．要するに，$\mathrm{R}_{\frac{1}{2}}$ と Q_t が一致する t $\left(\neq \frac{1}{2}\right)$ を求めればよい．