【1999 京大 (理系)】

以下の問に答えよ．ただし $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$ が無理数であることは使ってよい．

(1) 有理数 p，q，r について $p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0$ ならば，$p=q=r=0$ であることを示せ．

(2) 実数係数の 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ について，$f(1)$，$f(1+\sqrt{2})$，$f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数であることを示せ．

(1) ここでは省略 (参考：詳細資料).

(2) $\boxed{\textbf{解法 1}}$ 背理法で示す.

$$f(1) = 1 + a + b, \quad f(1+\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} + (1+\sqrt{2})a + b, \quad f(\sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3}a + b$$

のすべてが有理数であると仮定する.

$$\begin{cases} a + b = l, & \cdots\cdots ① \\ 2\sqrt{2} + (1+\sqrt{2})a + b = m, & \cdots\cdots ② \\ \sqrt{3}a + b = n & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

とおく. 仮定は, これらがすべて有理数というものと同義である.

頑張って矛盾を出していきたい!

(b を消去するために，）② − ①，③ − ① により，

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}+\sqrt{2}a = m-l \quad (=u \text{ とおく }), & \cdots\cdots ④ \\ (\sqrt{3}-1)a = n-l \quad (=v \text{ とおく }). & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

u，v はともに有理数である．(a を消去するために，）⑤より，

$$a = \frac{v}{\sqrt{3}-1} \qquad \text{すなわち} \qquad a = \frac{\sqrt{3}+1}{2}v.$$

これを④に代入して，

$$2\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2}v = u.$$

この両辺を $\sqrt{2}$ 倍すると，

$$4+(\sqrt{3}+1)v = \sqrt{2}\,u.$$

$$\therefore \quad (v+4)+\sqrt{2}\cdot(-u)+\sqrt{3}\,v = 0.$$

ここで，$v+4$，$-u$，v はすべて有理数であることから，(1) により，

$$v+4=-u=v=0.$$

これを満たす v は存在せず，矛盾が生じる．　　(証明終り)

「a，b に依らず〜〜」ということで，a，b を消去する方針で考えた．
a，b を消去した式は，a，b に依らず成り立つ式だからである．3 つの式に分解してしまうと，消去するにも手間がかかる．

$\boxed{\text{解法 }2}$ 本日のメインテーマ 講演をお楽しみに!!