2023年　京大理系

1　(35 点)

次の各問に答えよ．

問1　定積分 $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\log\left(x^2\right)dx$ の値を求めよ．

問2　整式 $x^{2023}-1$ を整式 $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割ったときの余りを求めよ．

2　(30 点)

空間内の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする．点 D，P，Q を次のように定める．点 D は $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たし，点 P は線分 OA を 1 : 2 に内分し，点 Q は線分 OB の中点である．さらに，直線 OD 上の点 R を，直線 QR と直線 PC が交点を持つように定める．このとき，線分 OR の長さと線分 RD の長さの比 OR : RD を求めよ．

3　(30 点)

n を自然数とする．1 個のさいころを n 回投げ，出た目を順に X_1, X_2, ……, X_n とし，n 個の数の積 $X_1X_2\cdots\cdots X_n$ を Y とする．

(1) Y が 5 で割り切れる確率を求めよ．

(2) Y が 15 で割り切れる確率を求めよ．

4　(35 点)

次の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1+\frac{1}{e^{-x^2}+\frac{1}{4}x^2+1}\qquad(-1\leqq x\leqq 1)$$

ただし，e は自然対数の底であり，その値は $e=2.71\cdots\cdots$ である．

5　(35 点)

O を原点とする xyz 空間において点 P と点 Q は次の 3 つの条件 (a)，(b)，(c) を満たしている．

(a) 点 P は x 軸上にある．

(b) 点 Q は yz 平面上にある．

(c) 線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である．

点 P と点 Q が条件 (a)，(b)，(c) を満たしながらくまなく動くとき，線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ．

6　(35 点)

p を 3 以上の素数とする．また，θ を実数とする．

(1) $\cos 3\theta$ と $\cos 4\theta$ を $\cos\theta$ の式として表せ．

(2) $\cos\theta=\dfrac{1}{p}$ のとき，$\theta=\dfrac{m}{n}\cdot\pi$ となるような正の整数 m，n が存在するか否かを理由を付けて判定せよ．

※ 太線枠の問題を中心に扱います。

2023年　京大文系

$\boxed{1}$ (30 点)

次の各問に答えよ．

問1　n を自然数とする．1 個のさいころを n 回投げるとき，出た目の積が 5 で割り切れる確率を求めよ．

問2　次の式の分母を有理化し，分母に 3 乗根の記号が含まれない式として表せ．

$$\frac{55}{2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+5}$$

$\boxed{2}$ (30 点)

空間内の 4 点 O，A，B，C は同一平面上にないとする．点 D，P，Q を次のように定める．点 D は $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たし，点 P は線分 OA を $1:2$ に内分し，点 Q は線分 OB の中点である．さらに，直線 OD 上の点 R を，直線 QR と直線 PC が交点を持つように定める．このとき，線分 OR の長さと線分 RD の長さの比 OR : RD を求めよ．

$\boxed{3}$ (30 点)

(1)　$\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ の式として表せ．

(2)　半径 1 の円に内接する正五角形の一辺の長さが 1.15 より大きいか否かを理由を付けて判定せよ．

$\boxed{4}$ (30 点)

数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たしている．

$$a_1=3,\qquad a_n=\frac{S_n}{n}+(n-1)\cdot 2^n\quad (n=2,3,4,\cdots\cdots)$$

ただし，$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ である．このとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{5}$ (30 点)

整式 $f(x)$ が恒等式

$$f(x)+\int_{-1}^{1}(x-y)^2 f(y)\,dy=2x^2+x+\frac{5}{3}$$

を満たすとき，$f(x)$ を求めよ．

※ 太線枠の問題を中心に扱います。

2023年　阪大理系

1　n を 2 以上の自然数とする．

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{2}x^n \leqq (-1)^n\left\{\frac{1}{x+1} - 1 - \sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\} \leqq x^n - \frac{1}{2}x^{n+1}$$

(2)　$a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n\left(a_n - \log 2\right)$$

（配点率 20 ％）

2　平面上の 3 点 O，A，B が

$$\left|2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 1 \quad \text{かつ} \quad \left(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする．

(1)　$\left(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ を求めよ．

(2)　平面上の点 P が

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\right| \leqq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\left(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \leqq \frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の最大値と最小値を求めよ．

（配点率 20 ％）

3　P を座標平面上の点とし，点 P の座標を (a, b) とする．$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲にある実数 t のうち，曲線 $y = \cos x$ 上の点 $(t, \cos t)$ における接線が点 P を通るという条件をみたすものの個数を $N(\mathrm{P})$ とする．$N(\mathrm{P}) = 4$ かつ $0 < a < \pi$ をみたすような点 P の存在範囲を座標平面上に図示せよ．

（配点率 20 ％）

4　a，b を $a^2 + b^2 > 1$ かつ $b \neq 0$ をみたす実数の定数とする．座標平面の点 $\mathrm{A}(a, 0, b)$ と点 $\mathrm{P}(x, y\ 0)$ をとる．点 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ を通り直線 AP と垂直な平面を α とし，平面 α と直線 AP との交点を Q とする．

(1)　$\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right)^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right|^2$ が成り立つことを示せ．

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right| = 1$ をみたすように点 $\mathrm{P}(x, y, 0)$ が xy 平面上を動くとき，点 P の軌跡を求めよ．

（配点率 20 ％）

5　1 個のさいころを n 回投げて，k 回目に出た目を a_k とする．b_n を

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_1^{\,n-k} a_k$$

により定義し，b_n が 7 の倍数となる確率を p_n とする．

(1)　p_1，p_2 を求めよ．

(2)　数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ．

（配点率 20 ％）

※ 太線枠の問題を中心に扱います。

2023年　阪大文系

$\boxed{1}$　a，b を実数とする．θ についての方程式

$$\cos 2\theta = a\sin\theta + b$$

が実数解をもつような点 (a, b) の存在範囲を座標平面上に図示せよ．

（配転率 30 %）

$\boxed{2}$　正の実数 a，x に対して，

$$y = \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^3 + a\left(\log_{\sqrt{2}} x\right)\left(\log_4 x^3\right)$$

とする．

(1)　$t = \log_2 x$ とするとき，y を a，t を用いて表せ．

(2)　x が $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 8$ の範囲を動くとき，y の最大値 M を a を用いて表せ．

（配点率 35 %）

$\boxed{3}$　平面上の 3 点 O，A，B が

$$\left|2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}\right| = 1 \quad \text{かつ} \quad \left(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{3}$$

をみたすとする．

(1)　$\left(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}\right)$ を求めよ．

(2)　平面上の点 P が

$$\left|\overrightarrow{OP} - \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)\right| \leqq \frac{1}{3} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{OP}\cdot\left(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \leqq \frac{1}{3}$$

をみたすように動くとき，$\left|\overrightarrow{OP}\right|$ の最大値と最小値を求めよ．

（配点率 35 %）

※ 太線枠の問題を中心に扱います。

2023年　神大理系

1.　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} & (x\leqq 1)\\ 2x-1 & (x>1)\end{cases}$$

で定める．a を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=a,\quad a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

で定める．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1)　すべての実数 x について $f(x)\geqq x$ が成り立つことを示せ．

(2)　$a\leqq 1$ のとき，すべての正の整数 n について $a_n\leqq 1$ が成り立つことを示せ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を n と a を用いて表せ．

2.　a，b を実数とする．整式 $f(x)$ を $f(x)=x^2+ax+b$ で定める．以下の問に答えよ．ただし，2 次方程式の重解は 2 つと数える．(配点 30 点)

(1)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつための a と b がみたすべき必要十分条件を求めよ．

(2)　2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の実部が共に 0 より小さくなるような点 (a,b) の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

(3)　2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の実部が共に -1 より大きく，0 より小さくなるような点 (a,b) の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

3.　n を 2 以上の整数とする．袋の中には 1 から $2n$ までの整数が 1 つずつ書いてある $2n$ 枚のカードが入っている．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1)　この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ．

(2)　この袋から同時に 3 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ．

(3)　この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が $2n+1$ 以上である確率を求めよ．

4.　四面体 OABC があり，辺 OA，OB，OC の長さはそれぞれ $\sqrt{13}$，5，5 である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-11$ とする．頂点 O から △ABC を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を H とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1)　線分 AB の長さを求めよ．

(2)　実数 s，t を $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ をみたすように定めるとき，s と t の値を求めよ．

(3)　四面体 OABC の体積を求めよ．

5.　媒介変数表示

$$x=\sin t,\quad y=\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t\qquad (0\leqq t\leqq\pi)$$

で表される曲線を C とする．以下の問に答えよ．(配点 30 点)

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=0$ または $\dfrac{dy}{dt}=0$ となる t の値を求めよ．

(2)　C の概形を xy 平面上に描け．

(3)　C の $y\leqq 0$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

※ 太線枠の問題を中心に扱います。

2023年　神大文系

1. a，b を実数とする．整式 $f(x)$ を $f(x) = x^2 + ax + b$ で定める．以下の問に答えよ．(配点 25 点)

(1) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの正の解をもつための a と b がみたすべき必要十分条件を求めよ．

(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が 2 つの実数解をもち，それらが共に -1 より大きく，0 より小さくなるような点 (a, b) の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

(3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ の 2 つの解の実部が共に -1 より大きく，0 より小さくなるような点 (a, b) の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．ただし，2 次方程式の重解は 2 つと数える．

2. A，B の 2 人が，はじめに，A は 2 枚の硬貨を，B は 1 枚の硬貨を持っている．2 人は次の操作 (P) を繰り返すゲームを行う．

(P) 2 人は持っている硬貨すべてを同時に投げる．それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の枚数を数え，その枚数が少ない方が相手に 1 枚の硬貨を渡す．表が出た硬貨の枚数が同じときは硬貨のやりとりは行わない．

操作 (P) を繰り返し，2 人のどちらかが持っている硬貨の枚数が 3 枚となった時点でこのゲームは終了する．操作 (P) を n 回繰り返し行ったとき，A が持っている硬貨の枚数が 3 枚となってゲームが終了する確率を p_n とする．ただし，どの硬貨も 1 回投げたとき，表の出る確率は $\frac{1}{2}$ とする．以下の問に答えよ．(配点 25 点)

(1) p_1 の値を求めよ．

(2) p_2 の値を求めよ．

(3) p_3 の値を求めよ．

3. a を正の実数とする．2 つの円

$$C_1 : x^2 + y^2 = a, \qquad C_2 : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$$

が異なる 2 点 A，B で交わっているとする．直線 AB が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ $(p, 0)$，$(0, q)$ とするとき，以下の問に答えよ．(配点 25 点)

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) p，q の値を a を用いて表せ．

(3) p，q の値が共に整数となるような a の値をすべて求めよ．

※ 太線枠の問題を中心に扱います。