阪大理系学部　入試問題

2017年

$\boxed{1}$ 双曲線 $H : x^2 - y^2 = 1$ 上の 3 点 A$(-1, 0)$，B$(1, 0)$，C(s, t)（$t \neq 0$）を考える．

(1) 点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき，P の座標を s と t を用いてあらわせ．

(2) 点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき，Q の座標を s と t を用いてあらわせ．

(3) 点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明せよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{2}$ 複素数 z は $z^5 = 1$ を満たし，実部と虚部がともに正であるものとする．硬貨を投げて表が出れば 1，裏が出れば 0 とし，5 回投げて出た順に a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 とおく．複素数 w を

$w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$ と定める．

(1) 5 回とも表が出たとする．w の値を求めよ．

(2) $a_0 = a_2 = a_3 = 0$，$a_1 = a_4 = 1$ のとき，$|w| < 1$ であることを示せ．

(3) $|w| < 1$ である確率を求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{3}$ a, b を自然数とし，不等式

$$\left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4} \qquad \text{(A)}$$

を考える．次の問いに答えよ．ただし，$2.645 < \sqrt{7} < 2.646$ であること，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい．

(1) 不等式 (A) を満たし $b \geqq 2$ である自然数 a, b に対して

$$\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6$$

であることを示せ．

(2) 不等式 (A) を満たす自然数 a, b の組のうち，$b \geqq 2$ であるものをすべて求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{4}$ b, c を実数とする．2 次関数 $f(x) = -x^2 + bx + c$ が

$$0 \leqq f(1) \leqq 2, \qquad 5 \leqq f(3) \leqq 6$$

を満たすとする．

(1) $f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき，放物線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

（配点率 20 %）

阪大理系学部　入試問題

$\boxed{5}$ xy 平面上で放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく．回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x = 1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく．

(1) t を $0 \leqq t \leqq 2$ を満たす実数とする．xy 平面上の点 $(0, t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする．$t = (2\cos\theta)^2$ $\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いてあらわせ．

(2) M の体積 V を求めよ．

（配点率 20 %）