(1) $D:\begin{cases} 0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq \pi & \cdots ① \\ 2\sin(x+y) - 2\cos(x+y) \geqq \sqrt{2} & \cdots ② \end{cases}$

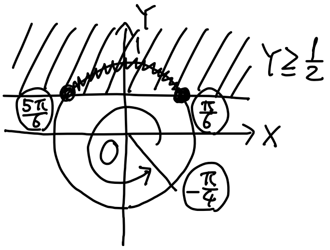
②を同値変形すると，

$$② \iff 2\sqrt{2}\sin\left(x+y-\frac{\pi}{4}\right) \geqq \sqrt{2}$$

$$\iff \sin\left(x+y-\frac{\pi}{4}\right) \geqq \frac{1}{2}. \quad \cdots ②'$$

①のもとでは $-\frac{\pi}{4} \leqq x+y-\frac{\pi}{4} \leqq 2\pi-\frac{\pi}{4}$ だから，

この範囲の中で②′を満たす $x+y-\frac{\pi}{4}$ を図から読みとると，



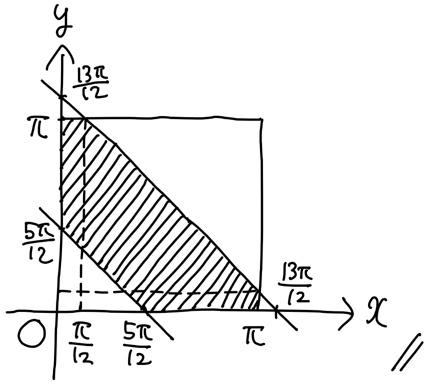
$$\frac{\pi}{6} \leqq x+y-\frac{\pi}{4} \leqq \frac{5\pi}{6}.$$

これより，

$$\frac{5\pi}{12} \leqq x+y \leqq \frac{13\pi}{12}. \quad \cdots ③$$

①かつ③を図示することにより，Dは右図

(境界線も含む).



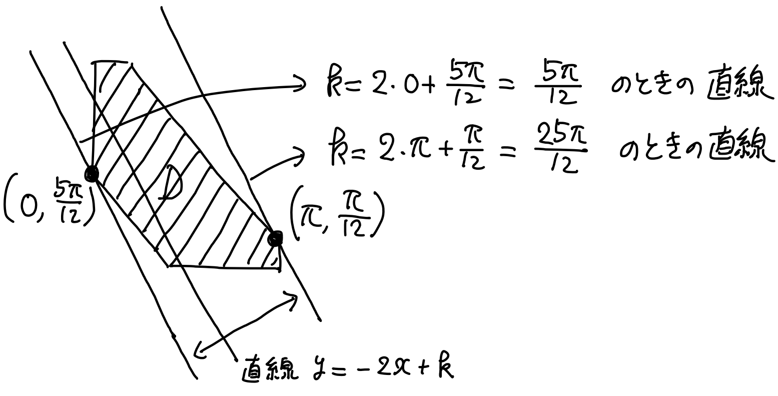
(2) 実数kについて，次の同値関係が成り立つ.

「kが $2x+y$ の変域に属している」

$\iff$「D上のある点(x, y)に対して $2x+y=k$ となる」

$\iff$「D上の点(x, y)で，直線 $y=-2x+k$ 上にあるものが存在する」

$\iff$「領域Dと直線 $y=-2x+k$ が共有点をもつ」



図より「領域Dと直線 $y=-2x+k$ が共有点をもつ」ようなkの範囲は

$$\frac{5\pi}{12} \leqq k \leqq \frac{25\pi}{12}$$

だから，$2x+y$ の変域は $\frac{5\pi}{12} \leqq 2x+y \leqq \frac{25\pi}{12}$ であり，

$2x+y$ の最大値は $\underline{\frac{25\pi}{12}}$，最小値は $\underline{\frac{5\pi}{12}}$