(1) $$f'(x)=\left(\int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)'-\left(\frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'$$

$$=\left(0-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)-\left\{\frac{1(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{x}{x^2+1}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)\right\}$$

$$=-e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1+\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}+\frac{-x^2}{x^2+1}\right)$$

$$=-e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^2}\left\{(x^2+1)^2+1-x^2-x^2(x^2+1)\right\}$$

$$=-e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{(x^2+1)^2}\cdot 2$$

これよりつねに $f'(x)<0$ であり，関数 $f(x)$ は単調に減少する． //

(2) (1)と $a\leqq b$ より $f(a)\geqq f(b)$ だから，

$$\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}\geqq 0-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}.$$

$$\therefore \frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad \cdots①$$

一方，$t\geqq 0$ において $e^{-\frac{t^2}{2}}$ は単調に減少することから，

$(0<)a\leqq t\leqq b$ であるすべての t に対して $e^{-\frac{a^2}{2}}\geqq e^{-\frac{t^2}{2}}$ だから

$$\int_a^b e^{-\frac{a^2}{2}}dt\geqq\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

$$\therefore e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)\geqq\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt \quad \cdots②$$

①，②より

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}}\leqq\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt\leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$ //

(3) $\sqrt{n}\,t = u$ による変数変換により置換積分を行うと

$$t=\frac{1}{\sqrt{n}}u \quad より \quad dt=\frac{1}{\sqrt{n}}du, \quad \begin{array}{c|c} t & 1 \to 2 \\ \hline u & \sqrt{n} \to 2\sqrt{n} \end{array}$$

であることから

$$I_n = \int_{\sqrt{n}}^{2\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}du = \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{\int_{\sqrt{n}}^{2\sqrt{n}} e^{-\frac{u^2}{2}}du}_{(=J_n とおく)}.$$

$a=\sqrt{n}$, $b=2\sqrt{n}$ として (2) の不等式を用いると,

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1}e^{-\frac{n}{2}} - \frac{2\sqrt{n}}{4n+1}e^{-2n} \leqq J_n \leqq e^{-\frac{n}{2}}\cdot\sqrt{n}.$$

$$\therefore \frac{1}{n+1}e^{-\frac{n}{2}} - \frac{2}{4n+1}e^{-2n} \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}J_n \leqq e^{-\frac{n}{2}}$$

$$\therefore e^{-\frac{n}{2}}\underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right)}_{(=K_n とおく)} \leqq I_n \leqq e^{-\frac{n}{2}} \quad \cdots ③$$

$$K_n = \underbrace{\frac{e^{-\frac{3}{2}n}}{n+1}}_{正}\left\{\underbrace{e^{\frac{3}{2}n}}_{\to\infty} - \underbrace{\frac{2(n+1)}{4n+1}}_{\to\frac{1}{2}}\right\}$$ より, 十分大きな n に対しては

$K_n > 0$ としてよく, ③の辺々を自然対数で比較して

$$\log\left\{e^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right)\right\} \leqq \log I_n \leqq \log e^{-\frac{n}{2}}.$$

$$\therefore -\frac{n}{2} + \log\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right) \leqq \log I_n \leqq -\frac{n}{2}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right)}_{(=L_n とおく)} \leqq \frac{1}{n}\log I_n \leqq -\frac{1}{2} \quad \cdots ④$$

ここで,

$$L_n = \frac{1}{n}\log\left[\frac{1}{n+1}\left\{1 - \frac{2(n+1)}{4n+1}e^{-\frac{3}{2}n}\right\}\right]$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{n}\log(n+1)}_{\substack{\to 0 \\ (問題文より)}} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\underbrace{\log\left\{1 - \underbrace{\frac{2(n+1)}{4n+1}}_{\to\frac{1}{2}}\underbrace{e^{-\frac{3}{2}n}}_{\to 0}\right\}}_{\to 0}$$

より, $L_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$ であるから, (④の左辺) $\xrightarrow[(n\to\infty)]{} -\frac{1}{2}$.

よって, ④より,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n = \underline{-\frac{1}{2}}.$$