与えられた漸化式より

$$z_n - z_{n-1} = -w\,(z_{n-1} - z_{n-2}) \quad (n=3, 4, 5, \ldots).$$

これより,

$$\begin{aligned} z_n - z_{n-1} &= (z_2 - z_1)(-w)^{n-2} \\ &= (1-w-1)(-w)^{n-2} \\ &= (-w)^{n-1} \quad (n=2, 3, 4, \ldots) \end{aligned}$$

であり,

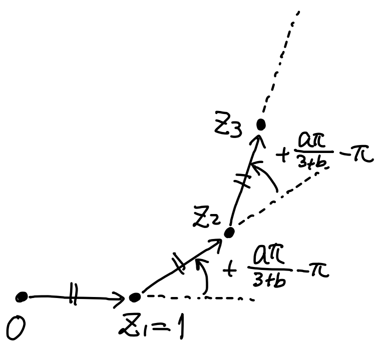
$$\begin{aligned} z_n &= z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \cdots + (z_n - z_{n-1}) \\ &= 1 + (-w) + (-w)^2 + \cdots + (-w)^{n-1}. \quad \cdots ① \end{aligned}$$

(この求め方は $n=2, 3, 4, \ldots$ に対して成り立つが,
結果は $n=1$ でも成り立つ.)

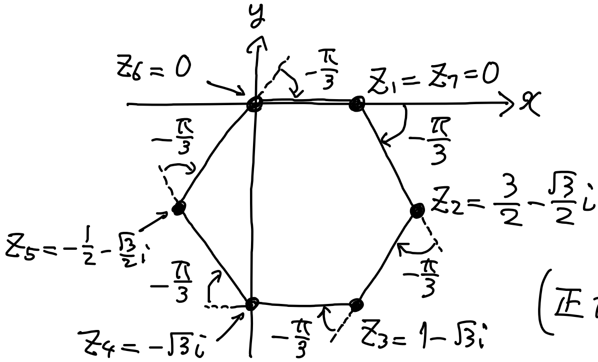
ここで, $-w$ を極形式で表すと

$$-w = \cos\left(\frac{a\pi}{3+b} - \pi\right) + i\sin\left(\frac{a\pi}{3+b} - \pi\right). \quad \cdots ②$$

よって, 点列 $z_1, z_2, z_3, \cdots$ の配置は次のとおり.

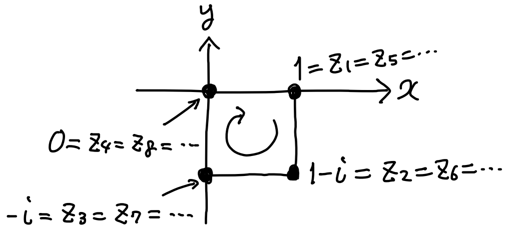


(1) $a=4$, $b=3$ のとき, $\frac{a\pi}{3+b} - \pi = -\frac{\pi}{3}$ だから, 点 $z_1, z_2, \cdots, z_7$ をこの順に線分で結ぶと, 次のとおり.



(正六角形) …(答)

(2)　$a=2,\ b=1$ のとき, $\frac{a\pi}{3+b}-\pi=-\frac{\pi}{2}$ だから, 点列 $z_1, z_2, z_3, \cdots$ は下図の正方形の頂点を時計回りに順に移動していく.



これより, 数列 $z_1, z_2, z_3, \cdots$ は周期4で値をくり返すから,

$63=4\times15+3$ により,

$$z_{63}=z_3=\underline{-i}$$

(3)　①より

$$z_{63}=1+(-w)+(-w)^2+\cdots+(-w)^{62}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1-(-w)^{63}}{1+w} & (\text{if } -w\neq1)\\ 63 & (\text{if } -w=1)\end{cases}$$

であるから, 次の同値関係が成り立つ.

$$z_{63}=0 \iff (-w)^{63}=1 \text{ かつ } -w\neq1$$

$$\iff \begin{cases}\left(\dfrac{a\pi}{3+b}-\pi\right)\times63=2\pi\times(\text{整数}) & (②より)\\ \dfrac{a\pi}{3+b}-\pi\neq2\pi\times(\text{整数})\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\dfrac{63a}{3+b}-63=2\times(\text{整数})\\ \dfrac{a}{3+b}-1\neq2\times(\text{整数})\end{cases}$$

$$\iff \frac{3^2\cdot7a}{3+b}\text{ は奇数 かつ } \frac{a}{3+b}\text{ は奇数でない}\cdots③$$

b の値に応じて ③を満たす a を求めると, 次の表のとおり.

b	a
1	なし
2	なし
3	2
4	1, 3, 5
5	なし
6	1, 3, 5

さいころを2回投げたときの (a,b) の出方は全部で 6^2 通りあり,

このうち ③つまり $z_{63}=0$ を満たすものは 上の表より

$$0+0+1+3+0+3=7 \text{ 通り}$$

であるから, 求める確率は

$$\frac{7}{6^2}=\underline{\frac{7}{36}}$$