(1)　点$(2, \sqrt{2})$が領域Aに属するためには

$$s+t=2,\quad st=\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす実数の組(s, t)が存在することが必要となる。

ところが①よりs, tは2次方程式

$$x^2-2x+\sqrt{2}=0 \quad \cdots\cdots ②$$

の2解であり，

$$\frac{(②\text{の判別式})}{4}=1-\sqrt{2}<0$$

より，②は実数解をもたないことから，①を満たす実数の組(s, t)は存在しない。

よって，点$(2, \sqrt{2})$は領域Aの点ではない。//

(2)　平面上の点(X, Y)について，次の同値関係が成り立つ。

「点(X, Y)が領域Aに属する」

$\iff$「ある実数の組(s, t)に対して

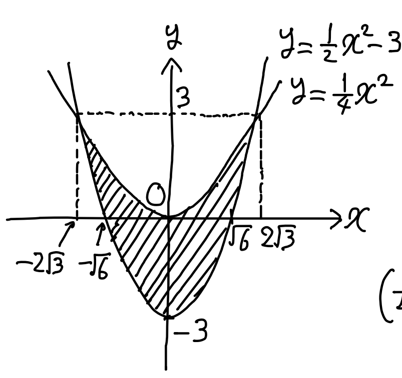
$\begin{cases} s+t=X \\ st=Y \end{cases}$ かつ $\underbrace{s^2+t^2}_{(=(s+t)^2-2st)} \leqq 6$ が成り立つ」

$\iff$「xの2次方程式 $x^2-Xx+Y=0$ の解が実数であり，かつ $X^2-2Y \leqq 6$」

$\iff$ 判別式：$X^2-4Y \geqq 0$ かつ $X^2-2Y \leqq 6$

$\iff$ $\frac{1}{2}X^2-3 \leqq Y \leqq \frac{1}{4}X^2$

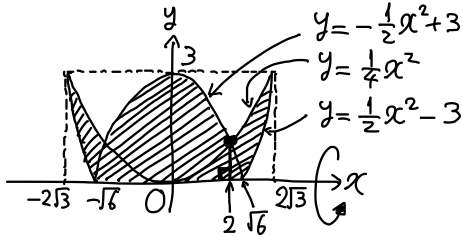
よって，Aは集合$\left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{1}{2}x^2-3 \leqq y \leqq \frac{1}{4}x^2\right\}$であり，図示すると次のとおり。



(境界線も含む)

//

(3)　求める体積 V は次の図の斜線部分を x 軸のまわり1回転してできる回転体の体積に等しい.



図形の $x=0$ に関する対称性も利用すると,

$$V = 2\times\left\{\int_0^2 \pi\left(-\frac{1}{2}x^2+3\right)^2dx+\int_2^{2\sqrt{3}}\pi\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2dx-\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\pi\left(\frac{1}{2}x^2-3\right)^2dx\right\}$$

$$= 2\pi\left\{\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^4-3x^2+9\right)dx+\frac{1}{16}\int_2^{2\sqrt{3}}x^4dx-\int_{\sqrt{6}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^4-3x^2+9\right)dx\right\}$$

$$= 2\pi\left\{\frac{32}{20}-8+9\cdot2+\frac{1}{16}\cdot\frac{32\cdot9\sqrt{3}-32}{5}-\frac{32\cdot9\sqrt{3}-36\sqrt{6}}{20}+(8\cdot3\sqrt{3}-6\sqrt{6})-9(2\sqrt{3}-\sqrt{6})\right\}$$

$$= 2\pi\left(\frac{8}{5}+10+\frac{18}{5}\sqrt{3}-\frac{2}{5}-\frac{72}{5}\sqrt{3}+\frac{9}{5}\sqrt{6}+24\sqrt{3}-6\sqrt{6}-18\sqrt{3}+9\sqrt{6}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{56}{5}-\frac{24}{5}\sqrt{3}+\frac{24}{5}\sqrt{6}\right)$$

$$= \frac{16\pi}{5}\left(7-3\sqrt{3}+3\sqrt{6}\right).$$ //