(1)　この樹形図のどの場所に書かれた分数 $\frac{p}{q}$ に対しても，これが既約であるならば，p と q の最大公約数は $(p, q)=1$ であり，ユークリッドの互除法により

$$(p, p+q)=(p, q)=1, \quad (p+q, q)=(p, q)=1$$

であるから，その直下の2つの分数 $\frac{p}{p+q}$，$\frac{p+q}{q}$ はいずれも既約となる．

　このことと，一番上の $\frac{1}{1}$ が既約であることから，この樹形図に現れる分数はすべて既約分数である．//

(2)　すべての正の有理数を 集合の列

$$S_n = \left\{ 既約分数 \frac{q}{p} \;\middle|\; p, q は自然数, p+q=n \right\}$$

$(n=2, 3, 4, \cdots)$

により分類できる.

(I)　$S_2 = \left\{ \frac{1}{1} \right\}$ であり, $\frac{1}{1}$ は樹形図に現れるから,

S_2 に属する既約分数はすべて樹形図に現れる.

(II)　ある2以上の自然数に対し,

$S_2, S_3, \cdots, S_k$ のいずれに属する既約分数もすべて樹形図に現れると仮定する.

このとき, S_{k+1} に属する任意の既約分数

$$\frac{p}{q} \left(p, q は自然数, p+q=k+1 \right)$$

について, $p+q \geqq 3$ と $\frac{p}{q}$ が既約であることから $p \neq q$ であり,

● $p > q$ ならば, $\frac{p-q}{q} \in S_p$ $(p = k+1-q < k+1)$ だから,

仮定より $\frac{p-q}{q}$ は樹形図に現れており, $\frac{p}{q}$ はその右下に現れる.

● $p < q$ ならば, $\frac{p}{q-p} \in S_q$ $(q = k+1-p < k+1)$ だから,

仮定より $\frac{p}{q-p}$ は樹形図に現れており, $\frac{p}{q}$ はその左下に現れる.

よって, 上の仮定のもとでは

S_{k+1} に属する既約分数はすべて樹形図に現れる.

(I),(II) から, 数学的帰納法により, $n=2,3,4,\cdots$ の任意の n に対して,

S_n に属する既約分数はすべて樹形図に現れる.

これより, すべての正の有理数はこの樹形図に現れる. //

(3)　この樹形図に現れるどの分数も, 上へさかのぼる方法は

「毎回, 1段上への戻り方が分母と分子の値にのみに依存して決まる」

ため, 一通りに定まる.

また, 設定より, この樹形図のどの分数も左下と右下は異なる分数つまり異なる有理数になっている.

これらにより, 同じ値の有理数へ通じる異なる経路は存在しない.

よって, この樹形図に現れる有理数はすべて異なる. //

(4)　さかのぼると，次のようになる．

$$\frac{19}{44} \xleftarrow[L]{} \frac{19}{25} \xleftarrow[L]{} \frac{19}{6} \xleftarrow[R]{} \frac{13}{6} \xleftarrow[R]{} \frac{7}{6} \xleftarrow[R]{} \frac{1}{6} \xleftarrow[L]{} \frac{1}{5} \xleftarrow[L]{} \frac{1}{4} \xleftarrow[L]{} \frac{1}{3} \xleftarrow[L]{} \frac{1}{2} \xleftarrow[L]{} \frac{1}{1}$$

（L，Rは樹形図においてそれぞれ左下，右下への移動を表す）

$\leftarrow$ が 10回であることから，$\frac{19}{44}$ は <u>11段目</u> にある．

また，L，Rが $\frac{1}{1}$ から順に LLLLLRRRLL と並ぶことから，$\frac{19}{44}$ の左には

$11100_{(2)} = 16 + 8 + 4 = 28$ 個の数があり，$\frac{19}{44}$ は左から <u>29番目</u> にある．

(2進法)