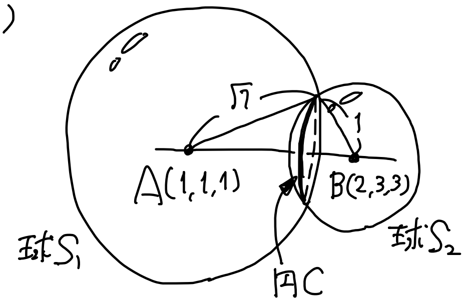
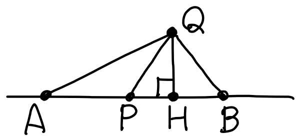
(1)

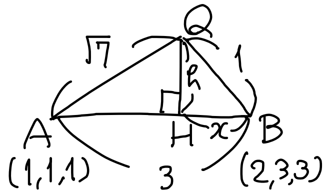


球面 S_1 は
　中心 $A(1,1,1)$, 半径 $\sqrt{7}$,
球面 S_2 は
　中心 $B(2,3,3)$, 半径 1
である.

S_1 との共通部分が C となる球面の中心 P は直線 AB 上にある.



C 上の点 Q をとると, その球面の半径は PQ であり, 半径が最小となるのは, 中心 P が Q から直線 AB に下ろした垂線の足 H に一致するときである.



$AB=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$ であることから, 左図のように長さ x, h とおくと, 三平方の定理より

$$\begin{cases} h^2+x^2=1 & \cdots ① \\ h^2+(3-x)^2=7. & \cdots ② \end{cases}$$

①−②: $-9+6x=-6$　∴ $x=\frac{1}{2}$

これと①より, $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (>0).

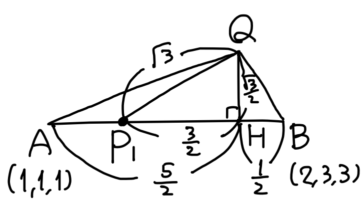
よって, 求める円は, 半径が $QH=h=\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり,

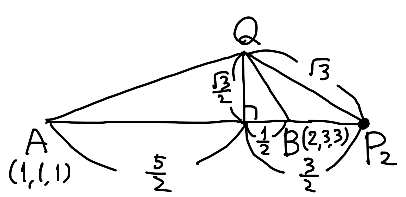
中心 H は AB を $3-x:x=\frac{5}{2}:\frac{1}{2}=5:1$ に内分する点 $\left(\frac{11}{6}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$

だから, その方程式は

$$\underline{\left(x-\frac{11}{6}\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2+\left(z-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{3}{4}}.$$

(2)　S_1 との共通部分が C となる球面の中心は直線 AB 上にあるから,
半径が $\sqrt{3}$ のとき, 中心は次の図の P_1 または P_2 となる.





P_1 は AB を $\frac{5}{2}-\frac{3}{2}:\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1:2$ に内分するから, $P_1\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

P_2 は AB を $\frac{5}{2}+\frac{3}{2}:\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=4:1$ に外分するから, $P_2\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}, \frac{11}{3}\right)$.

よって, 求める球面の方程式は

$$\begin{cases} \left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2+\left(z-\frac{5}{3}\right)^2=3 \\ \qquad と \\ \left(x-\frac{7}{3}\right)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+\left(z-\frac{11}{3}\right)^2=3. \end{cases}$$