

# 2020年

<p>1</p>	<p>関数</p> $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x+1}} \quad (x \geq 0)$ <p>について、以下の問いに答えよ。</p> <p>(1) <math>f(x)</math> の最大値を求めよ。</p> <p>(2) <math>f(x)</math> とその導関数の極限</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ <p>をそれぞれ求めよ。ただし、</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ <p>であることを用いてもよい。</p> <p>(3) <math>y = f(x)</math> のグラフの概形をかけ。ただし、グラフの凹凸を調べる必要はない。</p> <p style="text-align: right;">(配転率 20 %)</p>
<p>2</p>	<p>1 個のさいころを <math>n</math> 回投げて、<math>k</math> 回目に出た目が 1 の場合は <math>X_k = 1</math>、出た目が 2 の場合は <math>X_k = -1</math>、その他の目が出た場合は <math>X_k = 0</math> とする。</p> $Y_k = \cos\left(\frac{\pi}{3} X_k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} X_k\right)$ <p>とおき、<math>Y_1</math> から <math>Y_n</math> までの積 <math>Y_1 Y_2 Y_3 \cdots Y_n</math> を <math>Z_n</math> で表す。ただし、<math>i</math> は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。</p> <p>(1) <math>Z_2</math> が実数でない確率を求めよ。</p> <p>(2) <math>Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n</math> がいずれも実数でない確率を求めよ。</p> <p>(3) <math>Z_n</math> が実数となる確率を <math>p_n</math> とする。<math>p_n</math> を <math>n</math> を用いて表し、極限 <math>\lim_{n \rightarrow \infty} p_n</math> を求めよ。</p> <p style="text-align: right;">(配転率 20 %)</p>
<p>3</p>	<p><math>n</math> を 2 以上の自然数とする。三角形 <math>ABC</math> において、辺 <math>AB</math> の長さを <math>c</math>、辺 <math>CA</math> の長さを <math>b</math> で表す。<math>\angle ACB = n \angle ABC</math> であるとき、<math>c &lt; nb</math> を示せ。</p> <p style="text-align: right;">(配転率 20 %)</p>
<p>4</p>	<p><math>t</math> を正の実数とする。<math>xy</math> 平面において、連立不等式</p> $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad xy \leq 1, \quad x + y \leq t$ <p>の表す領域の面積を <math>S(t)</math> とおく。極限 <math>\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t) - 2 \log t)</math> を求めよ。</p> <p style="text-align: right;">(配転率 20 %)</p>
<p>5</p>	<p>3 辺の長さの和が 2 である三角形 <math>ABC</math> において、辺 <math>BC</math> の長さを <math>a</math>、辺 <math>CA</math> の長さを <math>b</math> で表す。三角形 <math>ABC</math> を辺 <math>BC</math> を軸として 1 回転させてできる回転体の体積を <math>V</math> とする。以下の問いに答えよ。</p> <p>(1) <math>a</math> の値を固定して <math>b</math> の値を変化させるとき、<math>V</math> が最大になるのは、三角形 <math>ABC</math> が辺 <math>BC</math> を底辺とする二等辺三角形となるときである。これを示せ。</p> <p>(2) <math>a, b</math> の値をとともに変化させるとき、<math>V</math> の最大値と、最大値を与える <math>a, b</math> の値をそれぞれ求めよ。</p> <p style="text-align: right;">(配転率 20 %)</p>