文 $\boxed{1}$

(1) $(x^2)'=2x$ だから，点 (t, t^2) における C の接線は

$y=2t(x-t)+t^2$ つまり $y=2tx-t^2$

と表され，これが点 $A(a, -1)$ を通るような t は

$-1=2t\cdot a-t^2$ より

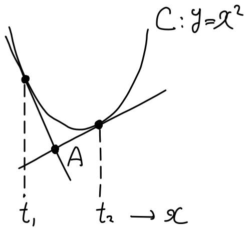
$t^2-2at-1=0$ の実数解である.

この判別式 D が $D=a^2+4>0$ であることと，

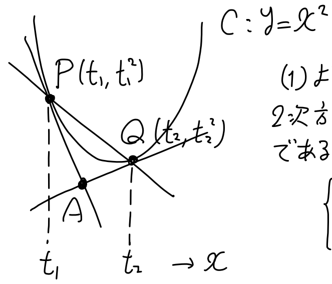
異なる t に対して異なる接線が対応することから

点 A を通る C の接線は

ちょうど2本存在する. //



(2)



(1)より，P, Q の x 座標 t_1, t_2 は

2次方程式 $t^2-2at-1=0$ の2解

であるから，解と係数の関係より

$$\begin{cases} t_1+t_2=2a \\ t_1t_2=-1 \end{cases} \quad \text{------} ①$$

直線 PQ は

点 $P(t_1, t_1^2)$ を通り，傾きが $\dfrac{t_1^2-t_2^2}{t_1-t_2}=t_1+t_2$ だから

その方程式は

$y=(t_1+t_2)(x-t_1)+t_1^2$

$\therefore y=(t_1+t_2)x-t_1t_2$

$\therefore y=2ax+1$ （①より） //

(3) 点と直線の距離公式より，

点 $A(a, -1)$ と直線 $y=2ax+1$ つまり直線 $2ax-y+1=0$ の

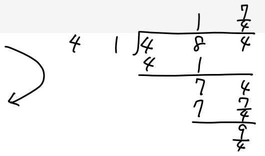
距離 L は

$$L=\frac{|2a\cdot a-(-1)+1|}{\sqrt{4a^2+1}}$$

$$=\frac{|2(a^2+1)|}{\sqrt{4a^2+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{4(a^2+1)^2}{4a^2+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{4a^4+8a^2+4}{4a^2+1}}$$



$$=\sqrt{a^2+\frac{7}{4}+\frac{\frac{9}{4}}{4a^2+1}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}(4a^2+1)+\frac{9}{4(4a^2+1)}+\frac{3}{2}}$$

$$\geqq\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{4}\cancel{(4a^2+1)}\cdot\frac{9}{4\cancel{(4a^2+1)}}}+\frac{3}{2}}$$

（相加平均と相乗平均の大小関係より）

$$=\sqrt{3}$$

また，等号が成り立つための条件は，公式より

$\frac{1}{4}(4a^2+1)=\frac{9}{4(4a^2+1)}$

$\therefore (4a^2+1)^2=9$

$\therefore 4a^2+1=3\ (>0)$

$\therefore a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって，L の最小値は $\underline{\sqrt{3}}$ であり，そのとき $\underline{a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$.