文 3

(＊)より

$$\frac{1}{3}(c^3-a^3)+\frac{b}{2}(c^2-a^2)=\frac{1}{3}(c^3-b^3)+\frac{a}{2}(c^2-b^2)$$

$$\therefore \frac{1}{3}(b^3-a^3)+\frac{c^2}{2}(b-a)+\frac{ab}{2}(b-a)=0 \quad \text{------} ①$$

(1) $a \neq b$ より $b-a\neq 0$ だから、①の両辺を $b-a$ で割ると

$$\frac{1}{3}(b^2+ba+a^2)+\frac{c^2}{2}+\frac{ab}{2}=0$$

$$\therefore 2b^2+5ba+2a^2+3c^2=0$$

$$\therefore \underline{c^2=-\frac{1}{3}(2b^2+5ab+2a^2)} \quad \text{----------} ②$$

//

(2) $a<b$ より $a\neq b$ だから、②が成り立ち、

さらに $c=3$ を代入すると

$$3^2=-\frac{1}{3}(2b^2+5ab+2a^2)$$

$$\therefore -3^3=(2b+a)(b+2a) \quad \text{--------} ③$$

$(2b+a)-(b+2a)=b-a>0$ より $2b+a>b+2a$ だから

③より

$$\begin{pmatrix}2b+a\\ b+2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -3^3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\ -3^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3^2\\ -3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3^3\\ -1\end{pmatrix} \text{ に限られる.}$$

これより

$$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{55}{3}\\ \frac{29}{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-7\\ 5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\ 7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{29}{3}\\ \frac{55}{3}\end{pmatrix}$$

a, b は整数だから

$$\underline{(a,b)=(-7,5),(-5,7).}$$

//

(3) $a\neq b$ だから、②が成り立ち、変形すると

$$3c^2=-(2b+a)(b+2a) \quad \text{--------} ④$$

これより $2b+a$, $b+2a$ のうち少なくとも一方は3を約数にもつ.

また、$(2b+a)+(b+2a)=3(a+b)$ より $2b+a$, $b+2a$ のうち

一方のみが3を約数にもつことはない.

よって、$2b+a$, $b+2a$ は共に3を約数にもつ.

これより④の右辺は 3^2 を約数にもち、c^2 は3の倍数となるから、c は3の倍数である. //