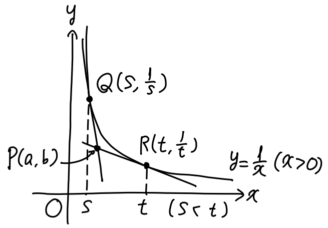
理 1




(1) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ より, 点 $\left(u, \frac{1}{u}\right)$ における曲線 $y=\frac{1}{x}$ の

接線は $y = -\frac{1}{u^2}(x-u)+\frac{1}{u}$

つまり $y = -\frac{1}{u^2}x + \frac{2}{u}$ と表わされる.

これが点 P$(a, b)$ を通るときの $u$ は

$b = -\frac{1}{u^2}a + \frac{2}{u}$ を $u$ について解いて

$bu^2 - 2u + a = 0$

$\therefore u = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-ab}}{b}$ $(b \neq 0$ より$)$

$ab<1$ より $0 < \dfrac{1-\sqrt{1-ab}}{b} < \dfrac{1+\sqrt{1-ab}}{b}$ だから

$s = \dfrac{1-\sqrt{1-ab}}{b}$, $t = \dfrac{1+\sqrt{1-ab}}{b}$ //

(2) (1)より

$$\frac{t}{s} = \frac{1+\sqrt{1-ab}}{1-\sqrt{1-ab}}$$
$$= -1 + \frac{2}{1-\sqrt{1-ab}}$$

$0<ab<1$ より $1-\sqrt{1-ab}>0$ に注意すると, 次の同値関係が成り立つ.

「$\frac{t}{s}$ が最小になる」$\iff$「$1-\sqrt{1-ab}$ が最大になる」

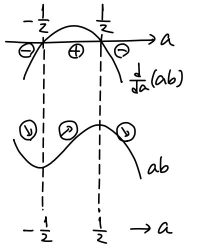
$\iff$「$\sqrt{1-ab}$ が最小になる」

$\iff$「$ab$ が最大になる」

一方, 設定より $b = \frac{9}{4} - 3a^2$ であり,

$$ab = a\left(\frac{9}{4}-3a^2\right) = \frac{9}{4}a - 3a^3$$

$$\frac{d}{da}(ab) = \frac{9}{4} - 9a^2 = -9\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)$$




$a=\frac{1}{2}$ のとき $b = \frac{9}{4} - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$ であり, $ab = \frac{3}{4} < 1$. ―― ①

また, $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$ より $\begin{cases} a>0 \\ \frac{9}{4}-3a^2>0 \end{cases}$ つまり $0<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり,

この範囲内では上図と①より つねに $ab<1$ が成立つ.

これより $a$ は $0<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$ のすべての値をとり得る.

以上より, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$ のとき $ab$ は最大値 $\frac{3}{4}$ をとり, //

$\frac{t}{s}$ は最小値 $-1+\dfrac{2}{1-\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = 3$ をとる. //