理3

(1) $y \geqq t\ (\geqq 1)$ のとき

$$-(y-t) \leqq \frac{1}{y} - \frac{1}{t} \leqq 0$$ が成り立つ.

[理由] $\frac{1}{y} - \frac{1}{t} + (y-t) = \frac{1}{yt}(y-t)(yt-1) \geqq 0$
より左側の不等式が成り立つ.
$\frac{1}{y} \leqq \frac{1}{t}$ より右側の不等式も成り立つ

これより, $x \geqq t$ のとき

$$\int_t^x \{-(y-t)\}dy \leqq \int_t^x \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{t}\right)dy \leqq \int_t^x 0\,dy$$

$$\therefore -\frac{1}{2}(x-t)^2 \leqq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leqq 0 \quad \text{----- ①}$$

(2) ① と $t \leqq t + \frac{1}{n}$ より

$$\int_t^{t+\frac{1}{n}} \left\{-\frac{1}{2}(x-t)^2\right\}dx \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \left\{\log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t)\right\}dx \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} 0\,dx$$

$$\therefore -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}\right)^3 \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \leqq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{6n^3} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{2tn^2} \leqq 0. \quad \text{----- ②}$$

(3) ② において $t = 1 + \frac{k}{n}$ とすると

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)n^2} \leqq 0$$

$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ として辺々加えると

$$-\frac{1}{6n^3}\cdot n \leqq \int_{1+\frac{0}{n}}^{1+\frac{n}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{6n^2} \leqq \int_1^2 \log x\,dx - \frac{1}{n}a_n - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq 0$$

$$\therefore n\int_1^2 \log x\,dx - \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq a_n \leqq n\int_1^2 \log x\,dx - \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} + \frac{1}{6n}$$

$$\therefore n\left(\int_1^2 \log x\,dx - p\right) - \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq a_n - pn \leqq n\left(\int_1^2 \log x\,dx - p\right) - \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} + \frac{1}{6n} \quad \text{----- ③}$$

ここで, $n \to \infty$ のとき ③ において

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \frac{1}{2}\Big[\log(1+x)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\log 2$$

$$\frac{1}{6n} \longrightarrow 0$$

だから, 仮に $\int_1^2 \log x\,dx - p > 0$ だとすると $a_n - pn \to \infty$,

$\int_1^2 \log x\,dx - p < 0$ だとすると $a_n - pn \to -\infty$

となり, $\lim_{n\to\infty}(a_n - pn)$ は値が定まらず不適.

よって, $\int_1^2 \log x\,dx - p = 0$ であり,

このとき ③ より, $a_n - pn \longrightarrow -\frac{1}{2}\log 2$ だから,

$$p = \int_1^2 \log x\,dx = \Big[x\log x - x\Big]_1^2 = 2\log 2 - 1$$

$$q = \lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = -\frac{1}{2}\log 2$$