理④

(*)より

$$\frac{1}{3}(c^3-a^3)+\frac{b}{2}(c^2-a^2)=\frac{1}{3}(c^3-b^3)+\frac{a}{2}(c^2-b^2)$$

$$\therefore \frac{1}{3}(b^3-a^3)+\frac{c^2}{2}(b-a)+\frac{ab}{2}(b-a)=0 \quad \text{------ ①}$$

(1) $a \neq b$ より $b-a \neq 0$ だから、①の両辺を $b-a$ で割ると

$$\frac{1}{3}(b^2+ba+a^2)+\frac{c^2}{2}+\frac{ab}{2}=0$$

$$\therefore 2b^2+5ba+2a^2+3c^2=0$$

$$\therefore 3c^2=-(\underline{2b+a})(\underline{b+2a}) \quad \text{------- ②}$$

これより $\underline{2b+a}$, $\underline{b+2a}$ のうち少なくとも一方は3を約数にもつ。

また、$(\underline{2b+a})+(\underline{b+2a})=3(a+b)$ より $\underline{2b+a}$, $\underline{b+2a}$ のうち一方のみが3を約数にもつことはない。

よって、$\underline{2b+a}$, $\underline{b+2a}$ は共に3を約数にもつ。

これより②の右辺は 3^2 を約数にもち、c^2 は3の倍数となるから、cは3の倍数である。 //

(2) $a<b$ より $a \neq b$ であることから、②が成り立ち、

$c=3600=2^4\cdot3^2\cdot5^2$ と併せて

$$(2b+a)(b+2a)=-2^8\cdot3^5\cdot5^4$$

一方、(1)と同様にして $2b+a$, $b+2a$ が共に3を約数にもつことと

$(2b+a)-(b+2a)=b-a>0$ より $2b+a>b+2a$ であることから

$$\begin{cases} 2b+a=3\times2^p\cdot3^q\cdot5^r & \text{------ ③} \\ b+2a=-3\times2^{8-p}\cdot3^{3-q}\cdot5^{4-r} \end{cases}$$

$$p\in\{0,1,2,\cdots,8\},\ q\in\{0,1,2,3\},\ r\in\{0,1,2,3,4\} \quad \text{---- ④}$$

と表示できる。

これを a, b について解くと

$$\begin{cases} a=-2^{9-p}\cdot3^{3-q}\cdot5^{4-r}-2^p\cdot3^q\cdot5^r & \text{------ ⑤} \\ b=2^{p+1}\cdot3^q\cdot5^r+2^{8-p}\cdot3^{3-q}\cdot5^{4-r} & \text{------ ⑥} \end{cases}$$

($a<b$ をみたす)

③より各(a,b)から(p,q,r)が1組に定まり、

⑤,⑥より各(p,q,r)から(a,b)が1組に定まるから

求める(a,b)の組の個数は④をみたす(p,q,r)の個数に一致し、

$$\begin{array}{ccccccc} p & \to & q & \to & r & & \\ 9 & \times & 4 & \times & 5 & = & \underline{180} \text{(組)} \end{array}$$