理 5

(1) $f(x)=x-\tan x$ とおく.

$$\begin{cases} x\to -\frac{\pi}{2}+0 \text{ のとき } f(x)\longrightarrow +\infty \\ x\to \frac{\pi}{2}-0 \text{ のとき } f(x)\longrightarrow -\infty \end{cases}$$

であることと $f(x)$ が $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ において連続であることから $f(x)=a$ をみたす x が $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ において1個以上存在する.

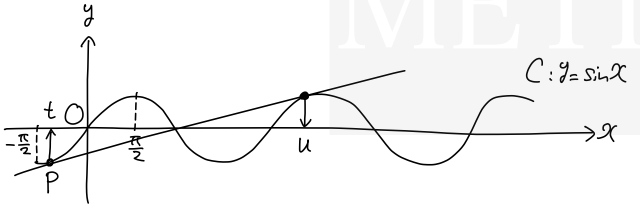
一方, $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ において

$$f'(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}=-\tan^2 x \begin{cases} =0 & (\text{if } x=0) \\ <0 & (\text{if } x\neq 0) \end{cases}$$

より, $f(x)$ が単調に減少することから, $f(x)=a$ をみたす x は $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ において最高でも1個しか存在しない.

以上より, $f(x)=a$ をみたす x は $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ においてちょうど1個存在し, 示せた. //

(2)



$(t, \sin t)$ における C の接線 $y=\cos t\cdot(x-t)+\sin t$ が $(u, \sin u)$ における接線 $y=\cos u\cdot(x-u)+\sin u$ に一致するように $u\,(\geqq \frac{1}{2})$ がとれるための条件が $t\in\{x_1, x_2, \cdots\}$ であることを示したい.

上記の2接線が一致するための条件は

$$\begin{cases} \cos u=\cos t & \cdots\cdots\cdots ① \\ -u\cos u+\sin u=-t\cos t+\sin t & \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

であり, $|t|<\frac{\pi}{2}$, $u\geqq\frac{\pi}{2}$, ①の条件下で②を同値変形すると

$$② \iff -\frac{②}{①} : u-\tan u=t-\tan t$$

$$\iff f(u)=f(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

①より ある自然数 n に対して

(ア) $u=t+2n\pi$ または (イ) $u=-t+2n\pi$

となる.

(ア)の場合, ③は $f(t+2n\pi)=f(t)$ となるが, これは(1)より $f(x)$ は単調減少であることに矛盾するので不適.

(イ)の場合, ③は $f(-t+2n\pi)=f(t)$ となり, 変形すると

$$-t+2n\pi-\tan(-t+2n\pi)=t-\tan t$$

$$\therefore -t+2n\pi+\tan t=t-\tan t$$

$$\therefore t-\tan t=n\pi$$

$|t|<\frac{\pi}{2}$ だから, x_n の定義より $t=x_n$ となる.

以上より, ①かつ②をみたす $u\,(\geqq\frac{1}{2})$ がとれるための条件はある自然数 n に対して $t=x_n$ となることであることが分かり, 示せた. //