阪大理系学部　入試問題

2021年

$\boxed{1}$	a, b を $ab<1$ をみたす正の実数とする．xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a, b)$ から，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$（$x>0$）に 2 本の接線を引き，その接点を $\mathrm{Q}\left(s, \dfrac{1}{s}\right)$，$\mathrm{R}\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$ とする．ただし，$s<t$ とする． (1) s および t を a, b を用いて表せ． (2) 点 $\mathrm{P}(a, b)$ が曲線 $y=\dfrac{9}{4}-3x^2$ 上の $x>0$，$y>0$ をみたす部分を動くとき，$\dfrac{t}{s}$ の最小値とそのときの a, b の値を求めよ． （配点率 20 %）
$\boxed{2}$	空間内に，同一平面上にない 4 点 O，A，B，C がある．s, t を $0<s<1$，$0<t<1$ をみたす実数とする．線分 OA を $1:1$ に内分する点を $\mathrm{A_0}$，線分 OB を $1:2$ に内分する点を $\mathrm{B_0}$，線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．さらに 4 点 $\mathrm{A_0}$，$\mathrm{B_0}$，P，Q が同一平面上にあるとする． (1) t を s を用いて表せ． (2) $\lvert\overrightarrow{\mathrm{OA}}\rvert=1$，$\lvert\overrightarrow{\mathrm{OB}}\rvert=\lvert\overrightarrow{\mathrm{OC}}\rvert=2$，$\angle\mathrm{AOB}=120^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=60^\circ$，$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ であるとき，s の値を求めよ． （配点率 20 %）
$\boxed{3}$	n を自然数とし，t を $t \geqq 1$ をみたす実数とする． (1) $x \geqq t$ のとき，不等式 $$-\frac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leqq 0$$ が成り立つことを示せ． (2) 不等式 $$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\, dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{2tn^2} \leqq 0$$ が成り立つことを示せ． (3) $a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-pn)=q$ をみたすような実数 p，q の値を求めよ． （配点率 20 %）
$\boxed{4}$	整数 a, b, c に関する次の条件（＊）を考える． $$\int_a^c (x^2+bx)\,dx = \int_b^c (x^2+ax)\,dx \quad \cdots\cdots（＊）$$ (1) 整数 a, b, c が（＊）および $a \neq b$ をみたすとき，c は 3 の倍数であることを示せ． (2) $c=3600$ のとき，（＊）および $a<b$ をみたす整数の組 (a, b) の個数を求めよ． （配点率 20 %）
$\boxed{5}$	次の問いに答えよ． (1) a を実数とする．x についての方程式 $x-\tan x=a$ の実数解のうち，$\lvert x\rvert<\dfrac{\pi}{2}$ をみたすものがちょうど 1 個あることを示せ． (2) 自然数 n に対し，$x-\tan x=n\pi$ かつ $\lvert x\rvert<\dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数 x を x_n とおく．t を $\lvert t\rvert<\dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とする．このとき，曲線 $C: y=\sin x$ 上の点 $\mathrm{P}(t, \sin t)$ における接線が，不等式 $x \geqq \dfrac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は，t が $x_1, x_2, x_3, \cdots$ のいずれかと等しいことであることを示せ． （配点率 20 %）