阪大理系学部　入試問題

2022年

$\boxed{1}$	r を正の実数とする．複素数平面上で，点 z が点 $\dfrac{3}{2}$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき， $z + w = zw$ を満たす点 w が描く図形を求めよ． （配点率 20 %）
$\boxed{2}$	$\alpha = \dfrac{2\pi}{7}$ とする．以下の問いに答えよ． (1) $\cos 4\alpha = \cos 3\alpha$ であることを示せ． (2) $f(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$ とするとき，$f(\cos\alpha) = 0$ が成り立つことを示せ． (3) $\cos\alpha$ は無理数であることを示せ． （配点率 20 %）
$\boxed{3}$	正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(0, t)$ と $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t}, 0\right)$ を考える．t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，座標平面上で線分 PQ が通過する部分を図示せよ． （配点率 20 %）
$\boxed{4}$	$f(x) = \log(x+1) + 1$ とする．以下の問いに答えよ． (1) 方程式 $f(x) = x$ は，$x > 0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ． (2) (1)の解を α とする．実数 x が $0 < x < \alpha$ を満たすならば，次の不等式が成り立つことを示せ． $0 < \dfrac{\alpha - f(x)}{\alpha - x} < f'(x)$ (3) 数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = f(x_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で定める．このとき，すべての自然数 n に対して， $\alpha - x_{n+1} < \dfrac{1}{2}(\alpha - x_n)$ が成り立つことを示せ． (4) (3) の数列 $\{x_n\}$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ を示せ． （配点率 20 %）
$\boxed{5}$	座標平面において，t を媒介変数として $x = e^t \cos t + e^\pi, \quad y = e^t \sin t \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$ で表される曲線を C とする．曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ． （配点率 20 %）