$\boxed{1}$

(1)

$$(-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}$$

$$=(-1)^n\left[\frac{1}{x+1}-\{\underbrace{1+(-x)+(-x)^2+\cdots+(-x)^{n-1}}_{\text{初項}1,\ \text{公比}-x(\neq 1),\ \text{項数}n\text{の等比数列の和}}\}\right]$$

$$=(-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1\cdot\frac{1-(-x)^n}{1-(-x)}\right\}$$

$$=(-1)^n\cdot\frac{(-x)^n}{x+1}$$

$$=\frac{x^n}{x+1}$$

また，$0\leqq x\leqq 1$ より

$$\frac{x^n}{x+1}-\frac{1}{2}x^n=\frac{x^n(1-x)}{2(x+1)}$$

$$\geqq 0,$$

$$x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}-\frac{x^n}{x+1}=\frac{x^n\{(2-x)(x+1)-2\}}{2(x+1)}$$

$$=\frac{x^n\cdot x(1-x)}{2(x+1)}$$

$$\geqq 0$$

より

$$\frac{1}{2}x^n\leqq\frac{x^n}{x+1}\leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}$$

よって，

$$\frac{1}{2}x^n\leqq(-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}\leqq x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}$$

//

(2) (1)より

$$\int_0^1\frac{1}{2}x^n\,dx\leqq\int_0^1(-1)^n\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}dx\leqq\int_0^1\left(x^n-\frac{1}{2}x^{n+1}\right)dx$$

ここで，

$$(\text{左辺})=\left[\frac{1}{2(n+1)}x^{n+1}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2(n+1)}$$

$$(\text{中辺})=(-1)^n\int_0^1\left\{\frac{1}{x+1}-1-\sum_{k=2}^{n}(-x)^{k-1}\right\}dx$$

$$=(-1)^n\left[\log|x+1|-x-\sum_{k=2}^{n}\frac{-1}{k}(-x)^k\right]_0^1$$

$$=(-1)^n\left\{\log 2-1-\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right\}$$

$$=(-1)^n(\log 2-a_n)$$

$$(\text{右辺})=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}x^{n+2}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}$$

だから，

$$\frac{1}{2(n+1)}\leqq(-1)^n(\log 2-a_n)\leqq\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+2)}$$

両辺に $-n$ をかけて整理すると

$$\therefore -\frac{1}{2(1+\frac{1}{n})}\geqq(-1)^n n(a_n-\log 2)\geqq-\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2(1+\frac{2}{n})}$$

$n\to\infty$ のとき

$$(\text{左辺})\longrightarrow-\frac{1}{2}$$

$$(\text{右辺})\longrightarrow-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

より，

$$(\text{中辺})\longrightarrow-\frac{1}{2}$$

つまり

$$\lim_{n\to\infty}\{(-1)^n n(a_n-\log 2)\}=\underline{-\frac{1}{2}}_{\,/\!/}$$