2

$$\begin{cases} |2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}| = 1 & \text{------ ①} \\ (2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3} & \text{------- ②} \end{cases}$$

(1) $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ とおく.

①より,

$$|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1 \quad \text{-------------- ③}$$

また, $\vec{u}+\vec{v} = 3(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ より

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})$$

だから, ②より

$$\vec{u}\cdot\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v}) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore |\vec{u}|^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} = 1$$

③を代入して, $1+\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$

$$\therefore \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \quad \text{------------ ④}$$

これより,

$$(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}) = \underline{0}_{//}$$

(2) Pは

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{OP} - \frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v})\right| \leqq \frac{1}{3} & \text{------------ ⑤} \\ \overrightarrow{OP}\cdot\vec{u} \leqq \frac{1}{3} & \text{-------------- ⑥} \end{cases}$$

を満たしながら動く.

③, ④より, Oが原点, $\vec{u} = (1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1)$ となるように xy 平面をとることができる.

$\frac{1}{3}(\vec{u}+\vec{v}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ だから, ⑤は

Pが 中心 $C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 半径 $\frac{1}{3}$ の円の周と内部を動く

ことを表している.

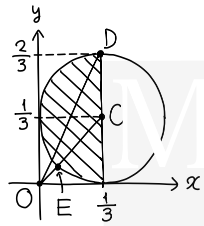
また, $P(x, y)$ とおくと, ⑥は

$$⑥ \Longleftrightarrow (x, y)\cdot(1, 0) \leqq \frac{1}{3}$$

$$\Longleftrightarrow x \leqq \frac{1}{3}$$

と変形できる.

よって, Pが動ける範囲は次のとおり (境界を含む).



$|\overrightarrow{OP}|$ が最大となるのは Pが図のDにあるときであり, その最大値は

$$OD = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= \underline{\frac{\sqrt{5}}{3}}_{//}$$

$|\overrightarrow{OP}|$ が最小となるのは Pが図のEにあるときであり, その最小値は

$$OE = OC - CE$$

$$= \frac{1}{3}\times\sqrt{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \underline{\frac{\sqrt{2}-1}{3}}_{//}$$