3

曲線 $y=\cos x$ ($y'=-\sin x$) の点 $(t, \cos t)$ における接線は

$$y=-\sin t\cdot(x-t)+\cos t$$

と表される。

この接線が点 $P(a,b)$ を通るために t が満たすべき条件は

$$b=\underbrace{-\sin t\cdot(a-t)+\cos t}_{f(t)\text{ とおく}}$$

であり，次の同値が成り立つ。

$N(P)=4 \iff$「$y=b$ と $y=f(t)$ のグラフの共有点が4個である」 ---(*)

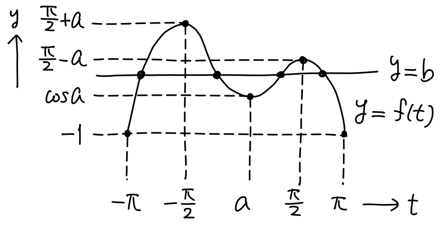
$f(t)$ について，

$$f(t)=(t-a)\sin t+\cos t$$
$$f'(t)=1\cdot\sin t+(t-a)\cos t-\sin t$$
$$=(t-a)\cos t$$

(ア) $0<a<\frac{\pi}{2}$ の場合

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$f(t)$	-1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}+a$	$\searrow$	$\cos a$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-a$	$\searrow$	-1

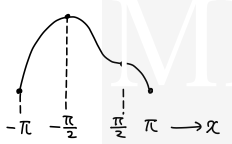
$\frac{\pi}{2}+a>\frac{\pi}{2}-a$，$\cos a>-1$ に注意して



(*) $\iff \cos a<b<\frac{\pi}{2}-a$

(イ) $a=\frac{\pi}{2}$ の場合

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$		$-$		$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	



(*)が成り立つことはないため，不適。

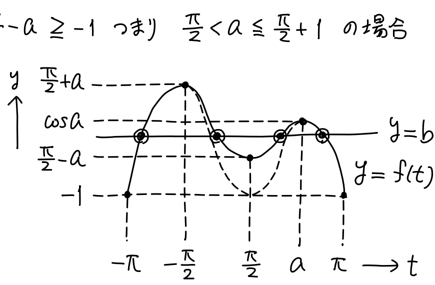
(ウ) $\frac{\pi}{2}<a<\pi$ の場合

t	$-\pi$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$f(t)$	-1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}+a$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}-a$	$\nearrow$	$\cos a$	$\searrow$	-1

$\frac{\pi}{2}+a>\cos a$ であり，

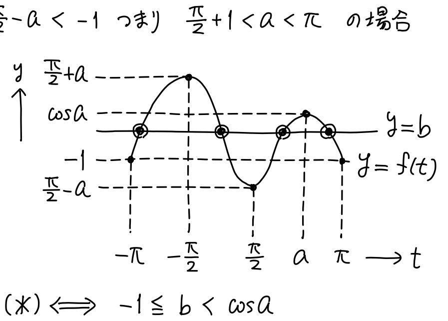
$\frac{\pi}{2}-a$ と -1 の大小によって分類すると

(ウ-1) $\frac{\pi}{2}-a\geqq-1$ つまり $\frac{\pi}{2}<a\leqq\frac{\pi}{2}+1$ の場合



(*) $\iff \frac{\pi}{2}-a<b<\cos a$

(ウ-1) $\frac{\pi}{2}-a<-1$ つまり $\frac{\pi}{2}+1<a<\pi$ の場合



(*) $\iff -1\leqq b<\cos a$

以上より，点Pの存在範囲は次のとおり。